DM 5 Mathématiques

Exercice 1

1. (a) Analyse : pour une constante $c_1 \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x+c_1)\,\mathrm{d}x &= \Big[\frac{x^2}{2}+c_1x\Big]_0^1 &(1)\\ &= \left(\frac{1}{2}+c_1\right)-0 &(2)\\ &= \frac{1}{2}+c_1 &(3)\end{aligned}$$

On souhaite alors avoir $\frac{1}{2}+c_1=0$, c'est-à-dire $c_1=-\frac{1}{2}$.

Synthèse : on pose $c_1=-\frac{1}{2}$ et alors on a bien $\displaystyle\int_0^1 (x+c_1)\,\mathrm{d}x=0$.

(b) Ces calculs montrent que B_1 est le polynôme $x\mapsto x-\frac{1}{2}$.

2. On a alors $2B_1 : x\mapsto 2x-1$ et $F_2 : x\mapsto x^2-x$.
Analyse : pour $c_2\in\mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 (F_2(x)+c_2)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (x^2-x+c_2)\,\mathrm{d}x &(4)\\ &= \Big[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+c_2x\Big]_0^1 &(5)\\ &= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+c_2\right)-0 &(6)\\ &= -\frac{1}{6}+c_2 &(7)\end{aligned}$$

Synthèse : on pose donc $c_2=\frac{1}{6}$, puis $B_2 : x\mapsto x^2-x+\frac{1}{6}$, qui vérifie bien $B_2'=2B_1$ et $\int_0^1 B_2=0$.

3. On reprend la même méthode. Ici F_3 doit être une primitive de $3B_2 : x\mapsto 3x^2-3x+\frac{1}{2}$, et donc c'est $F_3 : x\mapsto x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$. On cherche maintenant $c_3\in\mathbb{R}$ pour avoir $\int_0^1 (F_3(x)+c_3)\,\mathrm{d}x=0$. Ceci est égal à

$$\begin{aligned}\int_0^1 (F_3(x)+c_3)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+c_3\right)\,\mathrm{d}x &(8)\\ &= \Big[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}+c_3x\Big]_0^1 &(9)\\ &= \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+c_3\right)-0 &(10)\\ &= 0+c_3 &(11)\end{aligned}$$

et donc on pose $c_3=0$ et $B_3 : x\mapsto x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$.

4. Démontrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété « B_n est de degré n ».
Pour $n=0$ c'est vrai car B_0 est le polynôme constant $x\mapsto 1$, de degré 0.
Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que B_n soit bien de degré n. Alors B_{n+1} est une primitive de $(n+1)B_n$, ce dernier étant encore de degré n. Bien qu'il n'y ait pas dans le cours de théorème sur les degrés des primitives, ceci découle directement de celui sur les dérivées : si on note k le degré de B_{n+1} alors B_{n+1}' est de degré $k-1$ (on ne peut pas avoir B_{n+1} constant ici car B_n n'est pas le polynôme nul) et donc $k-1=n$ donc $k=n+1$. Donc B_{n+1} est bien de degré $n+1$.
Remarque : il n'est pas difficile de montrer en même temps dans la récurrence que le coefficient dominant de B_n est toujours 1. Si c'est le car pour n alors $B_n=x^n+\cdots$ et donc $(n+1)B_{n+1}=(n+1)x^n+\cdots$ et donc toute primitive a pour terme dominant $x^{n+1}+\cdots$.

5. Par définition B_{n+1} est une primitive de $(n+1)B_n$, donc une primitive de B_n est $\frac{1}{n+1}B_{n+1}$. Ainsi la propriété $\int_0^1 B_n = 1$ pour $n \geqslant 1$ se traduit par

$$0 = \int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{n+1}B_{n+1}(x)\Big]_0^1 \tag{12}$$

$$= \frac{1}{n+1}B_{n+1}(1) - \frac{1}{n+1}B_{n+1}(0) \tag{13}$$

et donc $B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$ pour tout $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $B_n(1) = B_n(0)$ pour $n \geqslant 2$.

6. (a) L'hypothèse $\mathscr{P}(1)$ est $\forall x \in \mathbb{R}$, $B_1(x+1) - B_1(x) = 1$. C'est bien le cas avec $B_1 : x \mapsto x - \frac{1}{2}$.

   (b) Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = B'_{n+1}(x+1) - B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x+1) - (n+1)B_n(x) = (n+1)\left(B_n(x+1) - B_n(x)\right)$. Par l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$, on a alors $G'(x) = (n+1) \times nx^{n-1}$. Prenant une primitive (comme toujours, unique à une constante additive près), il existe $e \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = (n+1)x^n + e$, et alors $G(0) = e$. Mais aussi $G(0) = B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)$ et on a ici $n+1 \geqslant 2$ donc on peut appliquer la question précédente et trouver $G(0) = 0$, ainsi $e = 0$.

   (c) On en déduit alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = (n+1)x^n$ et ceci démontre $\mathscr{P}(n+1)$. La propriété $\mathscr{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$.

7. Supposons qu'on ait deux polynômes, disons P et Q, vérifiant cette propriété. Une possibilité est de démontrer par récurrence qu'alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k) - P(0) = Q(k) - Q(0)$. On en déduit que $P - P(0) = Q - Q(0)$ pour une infinité de valeurs, et donc ces deux polynômes sont égaux ; on peut ré-écrire cela en disant qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = Q(x) + C$. Mais on a alors

$$\underbrace{\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x}_{0} = \int_0^1 \Big(Q(x) + C\Big)\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

$$= \int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 C\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x}_{0} + C \tag{16}$$

et donc $C = 0$.

B_n vérifiant la propriété énoncée, c'est bien l'unique polynôme qui la vérifie.

8. Il suffit de remarquer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p+1}\Big(B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)\Big) \tag{17}$$

$$= \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)\Big) \tag{18}$$

$$= \frac{1}{p+1}\Big((B_{p+1}(1) - B_{p+1}(0)) + (B_{p+1}(2) - B_{p+1}(1)) + \cdots + (B_{p+1}(n) - B_{p+1}(n-1))\Big) \tag{19}$$

$$= \frac{1}{p+1}\Big(B_{p+1}(n) - B_{p+1}(0)\Big) \tag{20}$$

grâce aux sommes téléscopiques. Le polymôme Q_p est $x \mapsto \frac{1}{p+1}(B_{p+1}(x) - B_{p+1}(0))$.

Par exemple pour $p = 1$ cela revient à écrire

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2}\Big(n^2 - n\Big) \tag{21}$$

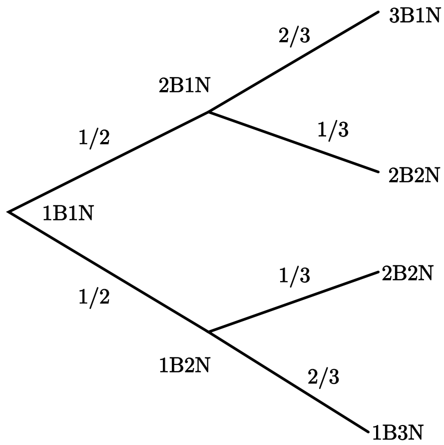
et pour $p = 2$ à

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{3}\Big(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\Big) \tag{22}$$

Quitte à factoriser on retrouve des formules bien connues ; nous avons écrit les termes k et k^2 comme des termes de sommes téléscopiques à l'aide des polynômes (B_n) applés *polynômes de Bernoulli*.

Exercice 2

1. Après un tirage il y a soit $2B$ et $1N$ (on a tiré B au début), soit $1B$ et $2N$ (on a tiré N). Ces deux possibilités sont équiprobables, car elles proviennent du tirage initial entre B et N, chacun avec probabilité $1/2$. On a donc $\mathbb{P}(A_{1,1}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A_{1,2}) = \frac{1}{2}$, et $\mathbb{P}(A_{1,k}) = 0$ si $k \neq 1, 2$.
2. Après n tirages, l'urne contient exactement $n+2$ boules. Mais comme au départ elle avait 1 boule blanche (et qu'on ne la fait jamais disparaitre), il y a toujours au moins $1B$. De même, comme au départ il y a avait toujours au moins 1 boule noire, celle-ci ne disparait pas jusqu'à la fin. On a donc toujours au moins 1 boule blanche et au plus $n+1$. Ainsi $A_{n,k}$ est impossible pour $k=0$ et pour $k > n+1$.
3. On trace facilement sur son brouillon un arbre donnant la composition de l'urne en fonction de ce qu'on a tiré. Ici la branche du haut indique toujours le tirage B, la branche du bas le tirage N.



   On en déduit alors facilement $\mathbb{P}(A_{2,3}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(A_{2,2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(A_{2,1}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
   Un arbre similaire pour $n=3$ montre que $\mathbb{P}(A_{3,k}) = \frac{1}{4}$ si $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, et 0 sinon.
4. Les évènements $(A_{n,k})_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ forment un système complet d'évènements : on a justifié à la question 2 qu'après n tirages on a $n+2$ boules et qu'on est forcément dans l'un de ces cas-là, et bien sûr un seul.
5. Démontrons par récurrence $\mathscr{P}(n)$: « $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $\mathbb{P}(A_{n,k}) = \frac{1}{n+1}$ ».

   Pour $n = 0$, cela signifie $\mathbb{P}(A_{0,1}) = 1$, ce qui est bien le cas car on sait qu'au départ il y a exactement une boule blanche.

   Éventuellement, pour $n = 1$, c'est exactement le contenu de la question 1.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons maintenant $\mathscr{P}(n)$ et effectuons un tirage supplémentaire. La formule des probabilités totales (guidé par l'intuition et les arbres de probabilités dessinés au brouillon) avec le système d'évènements de la question précédente nous donne, quelque soit $k \in [\![1, n+2]\!]$

$$\mathbb{P}(A_{n+1,k}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}_{A_{n,i}}(A_{n+1,k}) \times \mathbb{P}(A_{n,i}) \tag{23}$$

   À droite, les probabilités $\mathbb{P}(A_{n,i})$ sont connues par l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$, égales à $\frac{1}{n+1}$. Il s'agit maintenant de raisonner avec le terme $\mathbb{P}_{A_{n,i}}(A_{n+1,k})$. Cela signifie qu'on se place dans le cas d'une urne qui après n tirages contient $n+2$ boules, donc iB et $(n+2-i)N$, et on demande la probabilité qu'après un tirage supplémentaire il y ait kB. Mais alors k ne peut être égal qu'à i (on a tiré N, donc il y a toujours autant de B) ou bien $i+1$ (on a tiré B, on en a rajouté une). Ainsi on enlève les termes de la somme hors $i = k$ et $i = k-1$:

$$\mathbb{P}(A_{n+1,k}) = \frac{1}{n+1}\mathbb{P}_{A_{n,k}}(A_{n+1,k}) + \frac{1}{n+1}\mathbb{P}_{A_{n,k-1}}(A_{n+1,k}) \tag{24}$$

   Maintenant le terme $\mathbb{P}_{A_{n,k}}(A_{n+1,k})$ est la probabilité de tirer N dans l'urne avec kB et $(n+2-k)N$, donc c'est $\frac{n+2-k}{n+2}$. Et le terme $\mathbb{P}_{A_{n,k-1}}(A_{n+1,k})$ est la probabilité de tirer B, dans une urne avec $(k-1)B$ parmi $n+2$ boules totales, donc c'est $\frac{k-1}{n+2}$, à la condition $k > 1$ (sinon, il est impossible que l'urne contienne $0B$).

On trouve alors bien

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![2, n+2]\!], \quad \mathbb{P}(A_{n+1,k}) &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2-k}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{k-1}{n+2} && (25)\\
&= \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} && (26)\\
&= \frac{1}{n+2} && (27)
\end{aligned}$$

Pour $k = 1$ il suffit d'enlever ce terme $\mathbb{P}_{A_{n,k-1}}(A_{n+1,k})$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{n+1,1}) &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2-1}{n+2} && (28)\\
&= \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} && (29)\\
&= \frac{1}{n+2} && (30)
\end{aligned}$$

En conclusion on a bien $\forall k \in [\![1, n+2]\!]$, $\mathbb{P}(A_{n+1,k}) = \frac{1}{n+2}$ et ceci démontre la propriété $\mathscr{P}(n+2)$.