DM 5 Mathématiques

Quelques sommes

1. (a) On sait que

$$\boxed{A_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}} \tag{1}$$

(b) On en déduit :

- Si $q = 1$, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas puisqu'elle diverge vers $+\infty$.
- Sinon, alors elle converge si et seulement si la suite des q^{n+1} converge : l'implication est claire, et réciproquement, s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \ell \tag{2}$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 1 - \ell(1-q) \tag{3}$$

donc la suite des q^{n+1} converge. Mais ceci est le cas si et seulement si $q \in \left]-1,1\right]$ (on connait le comportement de la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas).

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge si et seulement si } |q| < 1}$.

2. (a) Par définition $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_{n+1} - B_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$, donc la suite est croissante (et même strictement).

(b) Comme $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Si k est un entier $k \geqslant 1$ alors pour $k \in [k, k+1]$ on a $k \leqslant x \leqslant k+1$ donc $k^\alpha \leqslant x^\alpha \leqslant (k+1)^\alpha$ donc en passant à l'inverse des inégalités strictement positives, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$.

(c) On intègre l'inégalité entre les bornes k et $k+1$ (k est un entier fixé $k \geqslant 1$)

$$\forall k \leqslant x \leqslant k+1, \quad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \tag{4}$$

qui donne

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{k^\alpha} \tag{5}$$

Mais les deux termes qui encadrent sont des intégrales de fonctions constantes (par rapport à x), intégrées sur une intervalle de longueur 1. Donc on a directement

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \tag{6}$$

(d) L'inégalité précédente étant valable pour tout $k \geqslant 1$, on peut fixer $n \geqslant 1$ et sommer l'inégalité pour k variant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \tag{7}$$

Le terme de droite est exactement B_n. Par la relation de Chasles (appliquée sur les intervalles consécutifs $[k, k+1]$) alors

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \tag{8}$$

Quant au terme de gauche, quitte à poser le changement d'indice $j = k+1$, alors on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j^\alpha} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j^\alpha} - 1 \tag{9}$$

(le terme pour $k=1$ est égal à 1). Si on l'applique en fait à $n-1$ alors on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^\alpha} - 1 \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \tag{10}$$

c'est-à-dire

$$B_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \tag{11}$$

Mis bout-à-bout on a bien pour tout $n \geqslant 1$

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant B_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \tag{12}$$

(e) i. Si $\alpha > 1$, alors on peut calculer une primitive de $\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$:

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \tag{13}$$

Notre encadrement donne alors

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant B_n \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \tag{14}$$

Dans notre cas, $\alpha - 1 > 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1} = +\infty$ et les inverses tendent alors vers 0. Le théorème des gendarmes ne nous aide pas ici (les deux limites ne sont pas les mêmes) ; il suffit en fait de regarder l'inégalité de droite et jetant un morceau :

$$\forall n \geqslant 1, \quad B_n \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1} \tag{15}$$

La suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est alors croissante, et majorée, donc $\boxed{\text{par le théorème de convergence monotone}}$ elle converge, et on sait que la limite est inférieure à $1 + \frac{1}{\alpha-1}$ (et supérieure à $B_1 = 1$).

ii. Si $\alpha < 1$, alors le calcul de primives est le même, mais on écrit plutôt en gardant des termes positifs :

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \tag{16}$$

et donc l'encadrement est

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leqslant B_n \leqslant 1 + \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \tag{17}$$

Sous cette forme, avec $1-\alpha > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} n^{1-\alpha} = +\infty$. Pour conclure il suffit d'utiliser le $\boxed{\text{théorème du « gros gendarme »}}$ (convergence par minoration) :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \underbrace{\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty} \leqslant B_n \tag{18}$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} B_n = +\infty$.

De plus dans ce cas, si on divise notre inégalité par $\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ on trouve

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{n^{1-\alpha}} - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leqslant \frac{(1-\alpha)B_n}{n^{1-\alpha}} \leqslant \frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}} + 1 - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \tag{19}$$

Mais les deux termes de l'encadrement convergent vers 1 : à droite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}} = 1 \tag{20}$$

et à gauche on a toujours $\frac{1}{n^{1-\alpha}}$ qui tend vers 0 et

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{n^{1-\alpha}} = \frac{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{1-\alpha}}{n^{1-\alpha}} = \frac{n^{1-\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}}{n^{1-\alpha}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{21}$$

Conclusion : par le $\boxed{\text{théorème des gendarmes}}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(1-\alpha)B_n}{n^{1-\alpha}} = 1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \tag{22}$$

iii. Si $\alpha = 1$ alors avec les méthodes précédentes, en calculant la primitive cette fois avec ln, on obtient

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln(x)\Big]_1^n = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n) \tag{23}$$

et donc notre encadrement est

$$\forall n \geqslant 1, \quad \ln(n+1) \leqslant B_n \leqslant 1 + \ln(n) \tag{24}$$

À gauche on sait bien $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$. Donc par le $\boxed{\text{théorème du « gros gendarme »}}$ on déduit $\lim_{n\to+\infty} B_n = +\infty$.
Si on divise notre encadrement par $\ln(n)$ alors on obtient

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{B_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + 1 \tag{25}$$

Mais dans cet encadrement les deux côtés convergent vers 1 : à droite c'est assez clair car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 \tag{26}$$

et à gauche

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{27}$$

Conclusion : par le $\boxed{\text{théorème des gendarmes}}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{B_n}{\ln(n)} = 1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)} \tag{28}$$

3. C'est exactement la preuve faite en classe pour le cas $\alpha = 1$, qui se généralise tel quel au cas $\alpha > 0$.
   (a) On a $C_1 = -1$, $C_2 = -1 + \frac{1}{2^\alpha}$, $C_3 = -1 + \frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha}$. On voit donc $C_2 > C_1$ (la suite est peut-être croissante, mais ne peut pas être décroissante), mais $C_3 < C_2$ (la suite n'est pas croissante).
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = C_{2n}$, et pour $n \geqslant 0$, posons $v_n = C_{2n+1}$. On n'a pas besoin de savoir à l'avance laquelle de ces deux suites est inférieure à l'autre. Comme $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Alors :
   - D'une part

$$u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}\right) - \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}\right) = \frac{1}{(2n+2)^\alpha} - \frac{1}{(2n+1)^\alpha} < 0 \tag{29}$$

   donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   - D'autre part

$$v_{n+1} - v_n = \left(\sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}\right) - \left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}\right) = -\frac{1}{(2n+3)^\alpha} + \frac{1}{(2n+2)^\alpha} > 0 \tag{30}$$

   donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- Enfin
$$v_n - u_n = \left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}\right) - \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}\right) = -\frac{1}{(2n+1)^\alpha} \tag{31}$$
et donc $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes}}$.

(c) D'après le $\boxed{\text{théorème des suites adjacentes}}$, on en déduit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, vers une même limite.

Comme ce sont les suites extraites de rang pair de la même suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on en déduit que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et ceci quelque soit $\alpha > 0$.

4. (a) La fonction $x \mapsto x\ln^\beta(x)$ est croissante sur $[1, +\infty[$, étant le produit de deux fonctions croissantes positives. Pour tout $k \geqslant 2$ et $k \leqslant x \leqslant k+1$ on a bien $\ln^\beta(k) \leqslant \ln^\beta(x) \leqslant \ln^\beta(k+1)$, donc par produit d'inégalités positives $k\ln^\beta(k) \leqslant x\ln^\beta(x) \leqslant (k+1)\ln^\beta(k+1)$, et par inverse (ici on a bien $k > 1$ pour avoir des ln strictement positifs)
$$\frac{1}{(k+1)\ln^\beta(k+1)} \leqslant \frac{1}{x\ln^\beta(x)} \leqslant \frac{1}{k\ln^\beta(k)} \tag{32}$$
Intégrant pour $x \in [k, k+1]$, qui est un intervalle de longueur 1, on trouve
$$\frac{1}{(k+1)\ln^\beta(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^\beta(x)} \leqslant \frac{1}{k\ln^\beta(k)} \tag{33}$$
Sommant l'inégalité de droite pour k de 2 à n (on fixe $n \geqslant 2$) alors
$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^\beta(x)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^\beta(k)} \tag{34}$$
qui correspond par la relation de Chasles à
$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^\beta(x)} \leqslant D_n \tag{35}$$
Sommant l'inégalité de gauche pour k de 2 à $n-1$ seulement, on trouve
$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\ln^\beta(k+1)} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^\beta(x)} \tag{36}$$
Via un changement d'indice $j = k+1$, ceci est aussi
$$\underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^\beta(k)}}_{D_n} - \frac{1}{2\ln^\beta(2)} \leqslant \int_2^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^\beta(x)} \tag{37}$$
En résumé on a bien, pour tout $n \geqslant 2$,
$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^\beta(x)} \leqslant D_n \leqslant \frac{1}{2\ln^\beta(2)} + \int_2^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^\beta(x)} \tag{38}$$

(b) L'intégrale se calcule en reconnaissant une primitive :
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln^{1-\beta}(x) = \frac{1-\beta}{x}\ln^{-\beta}(x) \quad (\beta \neq 1), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(\ln(x)) = \frac{1}{x\ln(x)} \tag{39}$$

- Si $\beta > 1$, alors
$$\int_1^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^\beta(x)} = \left[\frac{\ln^{1-\beta}(x)}{(1-\beta)}\right]_2^n = \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1}(2)} - \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1}(n)} \tag{40}$$

(on remet des signes et des puissances positives) et donc l'encadrement est $\forall n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1}(2)} - \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1}(n+1)} \leqslant D_n \leqslant \frac{1}{2\ln^{\beta}(2)} + \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1}(2)} - \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1}(n)} \tag{41}$$

Les deux côtés convergent vers une limite finie, mais pas la même ; la suite $(D_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante (car somme de termes positifs), le terme de droite est majoré par $\frac{1}{2\ln^{\beta}(2)} + \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1}(2)}$. Donc par convergence monotone la suite $(D_n)_{n\geqslant 2}$ converge.

- Si $\beta < 1$, alors par les mêmes calculs (mais on le ré-écrit avec des $1-\beta > 0$) on obtient $\forall n \geqslant 2$,

$$\frac{\ln^{1-\beta}(n+1)}{1-\beta} - \frac{\ln^{1-\beta}(2)}{1-\beta} \leqslant D_n \leqslant \frac{1}{2\ln^{\beta}(2)} + \frac{\ln^{1-\beta}(n)}{1-\beta} - \frac{\ln^{1-\beta}(2)}{1-\beta} \tag{42}$$

Cette fois-ci, les deux côtés de l'encadrement divergent vers $+\infty$. D'après le théorème du gros gendarme (on a seulement besoin de l'inégalité de gauche) alors $(D_n)_{n\geqslant 2}$ diverge vers $+\infty$.

- Si $\beta = 1$ alors on obtient l'encadrement $\forall n \geqslant 2$,

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leqslant D_n \leqslant \frac{1}{2\ln(2)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \tag{43}$$

Les deux côtés divergent vers $+\infty$. Donc $(D_n)_{n\geqslant 2}$ diverge vers $+\infty$.

En résumé $(D_n)_{n\geqslant 2}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

(c) Cela découle des calculs précédents :

- Si $\beta < 1$, on divise notre inégalité par $\frac{\ln^{1-\beta}(n)}{1-\beta}$, et les deux côtés convergent alors vers 1. On déduit par le théorème des gendarmes

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(1-\beta)D_n}{\ln^{1-\beta}(n)} = 1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^{1-\beta}(n)}{1-\beta}} \tag{44}$$

- Si $\beta = 1$, on divise notre inégalité par $\ln(\ln(n))$ et les deux côtés convergent alors vers 1, donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{D_n}{\ln(\ln(n))} = 1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))} \tag{45}$$

Remarque 1. En résumé on peut retenir la chose suivante :

- La somme d'un nombre infini de termes de plus en plus petits peut converger ou bien ne pas converger.
- Notamment la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ diverge ; mais dès qu'on met un exposant plus grand, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ etc, convergent. Au contraire, si on met un exposant plus petit, par exemple $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge.
- Si par contre on alterne de signe, alors toutes ces suites convergent, aussi bien $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ que $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}$ ou que $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.
- Quand ces suites divergent, on a des équivalents en $+\infty$, notamment $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ (ce qui explique la convergence particulièrement lente) et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$.
- On peut penser que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^{\beta}(k)}$ converge mieux car les termes sont plus petits que ceux de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$. Mais elle converge en fait si et seulement si $\beta > 1$. Sinon, elle diverge et on a encore des équivalents, tels que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$ qui tend vers $+\infty$ encore bien plus lentement que $\ln(n)$.
- Citez correctement les théorèmes sur les suites (gendarmes, convergence monotone…) en vérifiant bien les hypothèses, car ce sont des « gros » théorèmes.

Une équation

1. La fonction f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = e^x - \frac{1}{n}$, qui change de signe en $x = \ln\left(\frac{1}{n}\right)$, qui est négatif si $n \geqslant 1$ (et même strictement négatif pour $n > 1$). On calcule $f_n(0) = 1 - 3 = -2 < 0$ et en $+\infty$ on écrit

$$f_n(x) = \underbrace{e^x}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty} \left(\underbrace{1 - \frac{x}{e^x n} - \frac{3}{e^x}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1} \right) \tag{46}$$

ce qui démontre $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

x	0	x_n	$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	-2	0	$+\infty$

(47)

Par le $\boxed{\text{théorème de la bijection}}$, l'équation $f_n(x) = 0$ (c'est-à-dire l'équation (E_n)) admet une unique solution $x_n \in [0, +\infty[$ (en fait $x_n \in]0, +\infty[$).

2. (a) On sait $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire

$$0 = e^{x_{n+1}} - \frac{x_{n+1}}{n+1} - 3 \tag{48}$$

On a par définition

$$f_n(x_{n+1}) = e^{x_{n+1}} - \frac{x_{n+1}}{n} - 3 \tag{49}$$

La différence des deux lignes précédentes donne

$$f_n(x_{n+1}) - 0 = \left(e^{x_{n+1}} - \frac{x_{n+1}}{n} - 3\right) - \left(e^{x_{n+1}} - \frac{x_{n+1}}{n+1} - 3\right) = -x_{n+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \tag{50}$$

Comme $x_{n+1} \geqslant 0$, ceci est du signe (strictement) négatif : $f_n(x_{n+1}) \leqslant 0$.

(b) On peut alors placer x_{n+1} sur le tableau de variations de f_n et on observe que $x_{n+1} \leqslant x_n$. Ceci se démontre par l'absurde : si on avait $x_{n+1} > x_n$, alors par la croissance strict de la fonction f_n, on aurait $f_n(x_{n+1}) > f_n(x_n) = 0$.
On en conclut que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

3. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0. Par le $\boxed{\text{théorème de convergence monotone}}$, on en déduit que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, avec nécessairement $\ell \geqslant 0$.
Alors un passage à la limite pour $n \to +\infty$ dans $f_n(x_n) = 0$ soit

$$\forall n \geqslant 1, \quad e^{x_n} = \frac{x_n}{n} + 3 \tag{51}$$

montre que la limite ℓ vérifie $e^\ell = 3$ (le terme $e^{x_n} \to e^\ell$, et comme ℓ est une limite finie, alors $\frac{x_n}{n} \to 0$). On en déduit $\boxed{\ell = \ln(3)}$.