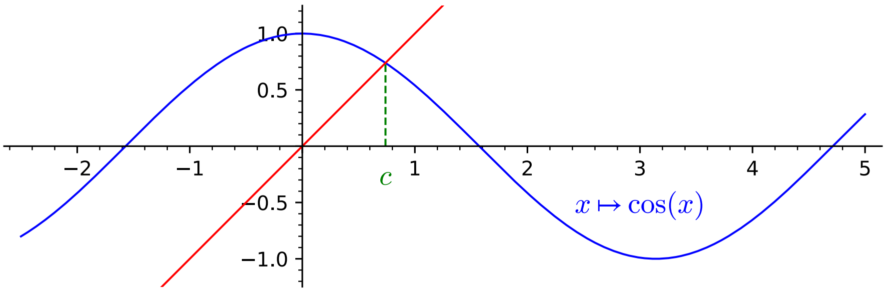
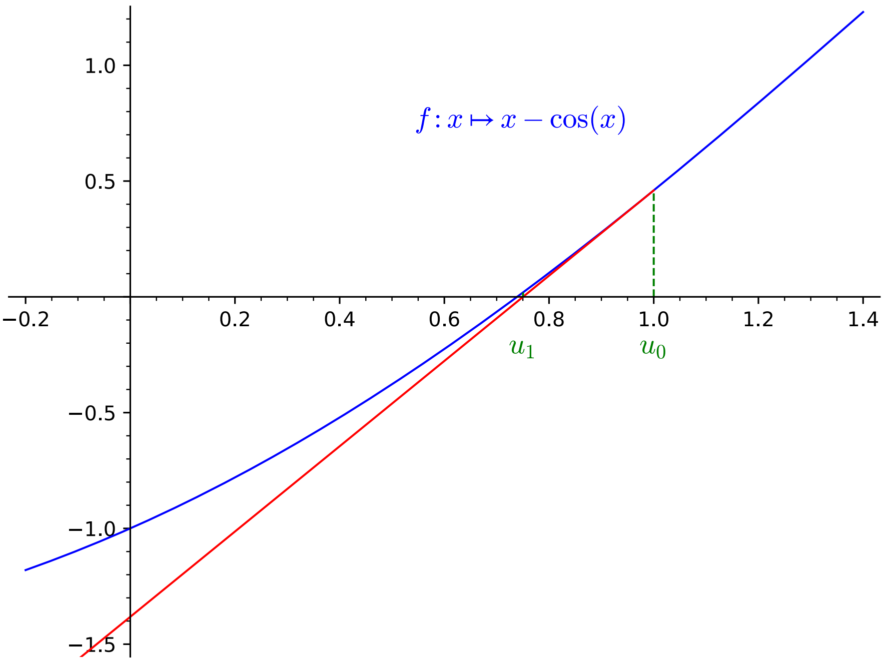
DM 6 Mathématiques
Correction

Tout d'abord représentons une fois graphiquement la fonction $x \mapsto \cos(x)$ ainsi que la fonction $x \mapsto x$ et leur intersection :



On voit très bien l'unique solution c sur $\mathbb{R}$ telle que $\cos(c) = c$, et numériquement $c \approx 0{,}739$. Représentons également les premières étapes de la méthode de Newton pour la fonction $x \mapsto x - \cos(x)$:



La convergence va être extrêmement rapide, u_1 est déjà très proche de c.

I Dichotomie

1. Standard. On pose $f : x \mapsto x - \cos(x)$, avec $f'(x) = 1 + \sin(x) \geqslant 0$, mais la dérivée ne s'annule qu'en un nombre de points isolés (un nombre fini de points dans chaque intervalle de longueur 2π par exemple) et donc f est bien strictement croissante, continue. De plus $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par le $\boxed{\text{théorème de la bijection}}$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	c	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	-1 $\nearrow$	0 $\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$	$+\infty$

(1)

De plus $f(0) = -1$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$ donc l'unique solution c est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
Mieux, $f(1) = 1 - \cos(1)$ mais 1 est un nombre strictement dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ (car on sait $3 < \pi < 4$, donc $\frac{\pi}{2} > 1$) donc $0 < \cos(1) < 1$, ainsi $f(1) > 0$.

2. Dichotomie la plus classique, cas d'une fonction croissante.

```
from math import cos

def solution(seuil):
    a = 0
    b = 1
    while b-a >= seuil:
        m = (a+b)/2
        if m - cos(m) >= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return (a, b)
```

3. À chaque étape, l'écart $b-a$ est divisé par 2 : si n est le numéro de l'étape de dichotomie alors à l'étape n l'écart est $\frac{1}{2^n}$. On doit donc résoudre

$$\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-p} \iff 10^p \leqslant 2^n \iff p\ln(10) \leqslant n\ln(2) \iff \boxed{p\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \leqslant n} \tag{2}$$

C'est l'expression du nombre d'étapes nécessaires pour que l'encadrement soit garanti être un intervalle de taille inférieure (strictement) à 10^{-p}, c'est-à-dire essentiellement avoir $p-1$ chiffres exacts et deux possibilités pour le p-ième chiffre après la virgule (par exemple ci-dessous, l'encadrement $0{,}7382 < c < 0{,}7392$ donne l'encadrement avec un écart $< 10^{-3}$ et dit que les deux premiers chiffres sont 7 puis 3, le troisième chiffre sera soit 8 soit 9).

La suite d'encadrements obtenus par cette méthode, par exemple ici pour un seuil de 10^{-6}, est :

```
0 1
0.5 1
0.5 0.75
0.625 0.75
0.6875 0.75
0.71875 0.75
0.734375 0.75
0.734375 0.7421875
0.73828125 0.7421875
0.73828125 0.740234375
0.73828125 0.7392578125
0.73876953125 0.7392578125
0.739013671875 0.7392578125
0.739013671875 0.7391357421875
0.73907470703125 0.7391357421875
0.73907470703125 0.739105224609375
0.73907470703125 0.7390899658203125
0.7390823364257812 0.7390899658203125
0.7390823364257812 0.7390861511230469
0.7390842437744141 0.7390861511230469
0.7390842437744141 0.7390851974487305
```

Les approximations successives par la méthode de Newton vont donner

```
1
0.7503638678402439
0.7391128909113617
0.739085133385284
0.7390851332151607
0.7390851332151607
0.7390851332151607
```

En 4 étapes, on atteint déjà la précision maximale dont est capable l'ordinateur dans sa représentation des nombres à virgule flottante !

Remarque 1. Le nombre $\cos(1)$ est irrationnel et n'a pas de formule simple comme certains angles s'exprimant en fractions de π. Si on l'utilise, c'est parce que c'est de toute façon la première étape de la méthode de Newton (si on démarrait à $u_0 = 0$, le terme suivant serait $u_1 = 1$), mais aussi parce qu'on ne suppose pas déjà qu'on sait calculer π, et donc on ne veut pas démarrer à $\frac{\pi}{2}$. Avec la dernière partie du problème, on sait que

$$\cos(1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} + \cdots \tag{3}$$

II Méthode de Newton

4. Ici f est $\mathcal{C}^\infty$ (fonctions usuelles) et $f' : x \mapsto 1 + \sin(x)$ aussi. Ainsi

$$F(x) = x - \frac{x - \cos(x)}{1 + \sin(x)} \tag{4}$$

Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, le dénominateur $1 + \sin(x)$ ne s'annule pas, donc $\boxed{F \text{ est } \mathcal{C}^\infty}$.
On calcule

$$F'(x) = 1 - \frac{(1 + \sin(x))^2 - \cos(x)(x - \cos(x))}{(1 + \sin(x))^2} = \boxed{\frac{\cos(x)(x - \cos(x))}{(1 + \sin(x))^2} = F'(x)} \tag{5}$$

On voit alors que $F'(x)$ est du signe de $x - \cos(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, qui change de signe précisément en c. On a aussi $F'(0) = -1$, $F'(c) = 0$, $F'(\frac{\pi}{2}) = 0$. On calcule $F(0) = 1$, $F(c) = c$, $F(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$.

x	0		c		$\frac{\pi}{2}$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	0
$F(x)$	1	$\searrow$	c	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$

(6)

5. (a) On vérifie à l'aide du tableau précédent que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $c < u_n \leqslant 1$, par récurrence :
   - Pour $n = 0$: c'est $u_0 = 1$.
   - Si pour $n \in \mathbb{N}$ c'est vérifié : alors sur l'intervalle $[c, 1] \subset [c, \frac{\pi}{2}]$, F est strictement croissante, et donc on obtient $F(c) < F(u_n) \leqslant F(1)$, avec $F(c) = c$, et de plus encore une fois sur cet intervalle $F(x) - x$ est du signe opposé à $x - \cos(x)$, donc est négatif, donc $F(x) \leqslant x$, ainsi $F(1) \leqslant 1$. On a donc bien $c < F(u_n) \leqslant 1$ soit $c < u_{n+1} \leqslant 1$.

   Ceci montre déjà que $\boxed{\text{la suite est bien définie}}$ et reste dans l'intervalle $]c, 1]$. Comme on l'a déjà dit, dans cet intervalle $F(x) \leqslant x$ donc $F(u_n) \leqslant u_n$ soit $u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite est $\boxed{\text{décroissante}}$.

   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par c et décroissante. Par le $\boxed{\text{théorème de convergence monotone}}$, elle converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$ avec $c \leqslant \ell \leqslant 1$. Mais un passage à la limite dans $u_{n+1} = F(u_n)$ montre que ℓ doit vérifier $\ell = F(\ell)$ ce qui (en remontant à la définition de F) donne directement $\cos(\ell) = \ell$, soit $\boxed{\ell = c}$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers c.

6. (a) On fixe $\in]c,1]$, on prend $x \neq c$. Par le théorème des accroissements finis appliqué entre c et x, il exite un $d_x \in]c,x[\subset [c,1]$ tel que
$$\frac{F(x)-c}{x-c} = \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = F'(d_x) \tag{7}$$
Or on calcule à part
$$F'(x) = \frac{(x-\cos(x))\cos(x)}{(1+\sin(x))^2} \tag{8}$$
Il s'agit donc de démontrer $0 < F'(x) < \frac{1}{2}$, pour tout $c < x \leqslant 1$.
Or sur cet intervalle on a déjà $x-\cos(x) > 0$ car la fonction $x \mapsto x-\cos(x)$ est strictement croissante. On a donc d'ailleurs $x-\cos(x) \leqslant 1-\cos(1)$. On a aussi (cette fois cos est décroissante) $0 < \cos(x) \leqslant \cos(c)$ (avec $\cos(c) = c$) et $1+\sin(x)^2 \geqslant 1+\sin(c)^2$. En résumé on trouve
$$\boxed{0 < F'(x) \leqslant \frac{c(1-\cos(1))}{(1+\sin(c))^2}} \tag{9}$$
Difficile de conclure plus loin sans la calculatrice et des encadrements précis de c (obtenus par exemple à l'aide de la dichotomie, qui sont des encadrements tout à fait valides) : le terme de droite est environ égal à 0,12 et est très certainement inférieur strictement à $\frac{1}{2}$.

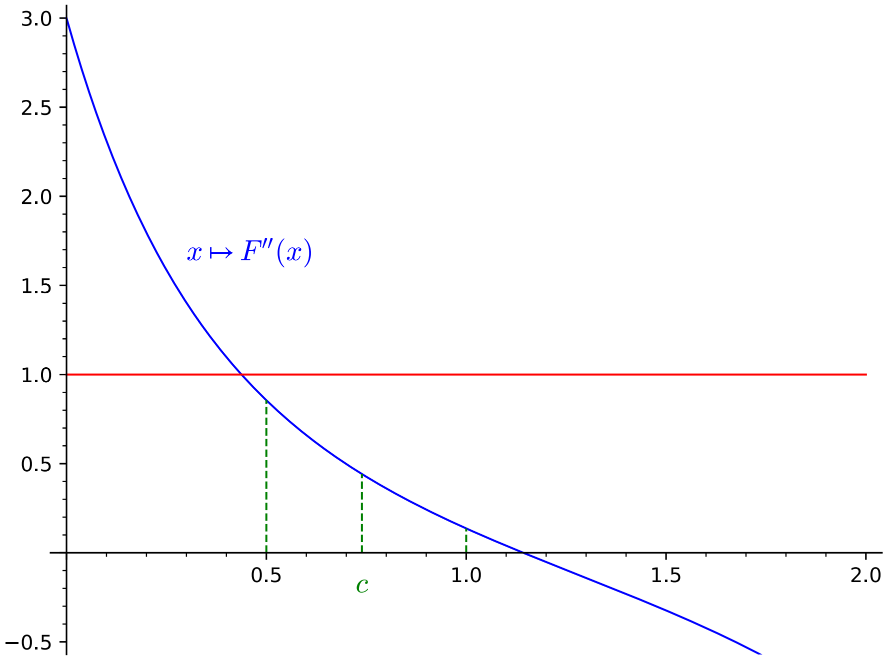
(b) C'est maintenant une simple récurrence, tout comme pour les suites géométriques, mais avec une inégalité :
- $n = 0$: on a bien par construction $0 < u_0 - c < 1$ car $u_0 = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'on ait $0 < u_n - c < \frac{1}{2^n}$. Appliquons l'inégalité précédente à u_n :
$$0 \leqslant \frac{F(u_n)-c}{u_n-c} < \frac{1}{2} \tag{10}$$
soit
$$0 < u_{n+1} - c < \frac{1}{2}(u_n - c) \tag{11}$$
qui donne directement par hypothèse de récurrence $0 < u_{n+1} - c < \frac{1}{2^{n+1}}$.

(c) La condition est vérifiée dès que $10^{-p} \leqslant \frac{1}{2^n}$. C'est alors exactement le même calcul que dans la partie précédente avec la dichotomie : le calcul que nous venons de faire ne conclut pas que la méthode de Newton converge plus rapidement !

7. (a) La variable x est fixée. On a d'une part $g(x) = 0$, d'autre part
$$g(c) = F(x) - F(c) - F'(c)(x-c) - \lambda\frac{(x-c)^2}{2} \tag{12}$$
L'équation $g(c) = g(x)$ est donc une équation sur λ (on répète : x est fixé, c est un paramètre qui ne bouge pas, et l'inconnue est λ) qui donne
$$\lambda\frac{(x-c)^2}{2} = F(x) - F(c) - F'(c)(x-c) \tag{13}$$
et admet bien une unique solution (on sait $c < x$)
$$\boxed{\lambda = 2\frac{F(x)-F(c)-F'(x)(x-c)}{(x-c)^2}} \tag{14}$$

(b) $\boxed{\text{Théorème de Rolle}}$ pour g : on sait que g est continue et dérivable sur au moins tout $[c, \frac{\pi}{2}]$, avec $g(c) = g(c)$, donc il existe un $d \in]c,x[$ tel que $g'(d) = 0$. Mais le calcule, en dérivant bien par rapport à la variable t (on répète encore : x est fixé), donne
$$g'(t) = -F'(t) - F''(t)(x-t) + F'(t) + \lambda(x-t) = -F''(t)(x-t) + \lambda(x-t) \tag{15}$$
La condition $g'(d) = 0$ est donc équivalente à $F''(d)(x-d) = \lambda(x-d)$ soit $\boxed{F''(d) = \lambda}$.
En résumé on a montré qu'il existe $d \in]c,x[$ tel que
$$F(x) - F(c) - F'(c)(x-c) = \frac{(x-c)^2}{2}F''(d) \tag{16}$$

(c) L'expression de F'' est peu sympathique, cependant c'est une fonction continue sur $[c, 1]$ et donc par le $\boxed{\text{théorème des bornes}}$ elle est bornée. Numériquement, on observe au moins $0 < F''(x) < 1$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Plus on est capable de donner une bonne borne sur F'', plus on est capable de prouver que la méthode de Newton converge rapidement. L'important pour les questions suivantes est au minimum que le terme $\frac{M(u_0-c)}{2}$ soit inférieur à 1 pour que ses puissances successives convergent vers 0.



(d) On a en fait $F'(c) = 0$. Nous avons donc montré

$$F(x) - F(c) = \frac{(x-c)^2}{2} F''(d) \tag{17}$$

Sachant $0 < F''(d) \leqslant M$, cela donne directement

$$\boxed{0 < \frac{F(x) - c}{(x-c)^2} \leqslant \frac{M}{2}} \tag{18}$$

8. Récurrence directe à partir de l'inégalité précédente :
- $n = 0$: c'est $0 < u_0 - c \leqslant u_0 - c$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'on ait

$$0 < u_n - c \leqslant \left(\frac{M(u_0 - c)}{2}\right)^{2^n - 1} \times (u_0 - c) \tag{19}$$

alors on aura, sachant $u_{n+1} = F(u_n)$,

$$0 < u_{n+1} - c \leqslant (u_n - c)^2 \times \frac{M}{2} \tag{20}$$

soit par l'hypothèse de récurrence

$$0 < u_{n+1} - c \leqslant \left(\frac{M(u_0 - c)}{2}\right)^{2(2^n - 1)} \times (u_0 - c)^2 \times \frac{M}{2} \tag{21}$$

ceci s'écrit aussi

$$0 < u_{n+1} - c \leqslant \left(\frac{M(u_0 - c)}{2}\right)^{2^{n+1} - 2} \times \frac{M(u_0 - c)}{2} \times (u_0 - c) \tag{22}$$

qui permet donc bien d'obtenir

$$0 < u_{n+1} - c \leqslant \left(\frac{M(u_0 - c)}{2}\right)^{2^{n+1}-1} \times (u_0 - c) \tag{23}$$

et c'est ce qu'on voulait.

En résumé on a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n - c \leqslant \left(\frac{M(u_0 - c)}{2}\right)^{2^{n}-1} \times (u_0 - c)} \tag{24}$$

9. La condition $0 < u_n - c < 10^{-p}$ est vérifiée dès que

$$10^{-p} \leqslant \left(\frac{M(u_0 - c)}{2}\right)^{2^{n}-1} \times (u_0 - c) \tag{25}$$

Soit, en passant au logarithme :

$$-p\ln(10) \leqslant \ln(u_0 - c) + (2^n - 1)\ln\left(\frac{M(u_0 - c)}{2}\right) \tag{26}$$

ou encore

$$2^n - 1 \geqslant \frac{-p\ln(10) - \ln(u_0 - c)}{\ln\left(\frac{M(u_0-c)}{2}\right)} \tag{27}$$

d'où on tire

$$\boxed{n \geqslant \frac{1}{\ln(2)}\ln\left(1 - \frac{p\ln(10) + \ln(u_0 - c)}{\ln\left(\frac{M(u_0-c)}{2}\right)}\right)} \tag{28}$$

En pratique on espère que $\frac{M(u_0-c)}{2} \leqslant 1$, donc son ln est négatif, le terme sous le ln est positif. n croît à peu près à la vitesse de $\frac{\ln(p)}{\ln(2)}$, ce qui est beaucoup plus lent (il faut beaucoup moins d'étapes pour arriver à la même précision) que pour la dichotomie.

Remarque 2. En résumé la méthode de Newton converge d'autant plus vite que :

- On sait que F'' est petit,
- On prend u_0 proche de c.

Dans ce cas la convergence est dite *quadratique*. Au lieu, comme dans la dichotomie, d'avoir un nombre de chiffres obtenu qui est proportionnel au nombre d'étapes de dichotomie, le nombre de chiffres *double* à chaque étape de la méthode de Newton et donc augmente beaucoup plus vite.

III Au fait, comment on calcule $\cos(x)$?

10. Démontrons cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   - $n = 0$: il s'agit de

$$\cos(x) = 1 - \int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t \tag{29}$$

   ce qui est vrai tout simplement par intégration

$$\boxed{\cos(x) - \cos(0) = \int_0^x \cos'(t)\,\mathrm{d}t} \tag{30}$$

   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'on ait

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} - (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\sin(t)\,\mathrm{d}t \tag{31}$$

Intégrons par partie le morceau de droite (le but est de faire augmenter les puissances) avec

$$u'(t) = \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \qquad v(t) = \sin(t) \tag{32}$$

$$u(t) = -\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad v'(t) = \cos(t) \tag{33}$$

qui donne

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \times \sin(t)\right]_0^x - \int_0^x \left(-\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \times \cos(t)\right) \mathrm{d}t \tag{34}$$

soit

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(t)\,\mathrm{d}t \tag{35}$$

Intégrons encore une fois par partie avec (on *continue* à faire monter les puissances)

$$u'(t) = \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad v(t) = \cos(t) \tag{36}$$

$$u(t) = -\frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad v'(t) = -\sin(t) \tag{37}$$

qui donne

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \times \cos(t)\right]_0^x - \int_0^x \left(-\frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \times -\sin(t)\right) \mathrm{d}t \tag{38}$$

Cette fois-ci le terme entre crochets ne s'annule pas :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin(t)\,\mathrm{d}t \tag{39}$$

Mettant tout bout à bout, on a en utilisant l'hypothèse de récurrence et sans perdre les signes :

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} - (-1)^n \left(\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin(t)\,\mathrm{d}t\right) \tag{40}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin(t)\,\mathrm{d}t \tag{41}$$

Le terme du milieu peut alors rentrer sous la somme et tout va bien :

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} - (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin(t)\,\mathrm{d}t} \tag{42}$$

11. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $0 \leqslant t \leqslant x$, on a $0 \leqslant \sin(t) \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ d'une part, et d'autre part $0 \leqslant x - t$. Ainsi on a bien

$$0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \tag{43}$$

d'où simplement par produit

$$\boxed{0 \leqslant \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t) \leqslant \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}} \tag{44}$$

12. On intègre l'inégalité précédente, avec x fixé, qui est bien valable pour tout $t \in [0, x]$ (l'intervalle d'intégration)

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{d}t \tag{45}$$

qui donne directement (mêmes calculs que dans l'intégration par parties précédente)

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \tag{46}$$

13. On sait que (toujours avec x fixé)

$$\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = -(-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\,\mathrm{d}t \tag{47}$$

Pour l'intégrale qui apparait à droite et dans la question précédente, on a bien sûr

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \tag{48}$$

(comparaisons usuelles puissance-factoriel). Par le $\boxed{\text{théorème des gendarmes}}$ on déduit alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{49}$$

c'est-à-dire précisément

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)} \tag{50}$$

14. En raisonnant plus précisément en valeur absolue, on n'a pas besoin de l'hypothèse $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:
   - Si $x \geqslant 0$, alors on a toujours

$$\forall 0 \leqslant t \leqslant x, \quad \left| \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t) \right| \leqslant \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \tag{51}$$

   d'où par $\boxed{\text{inégalité triangulaire}}$ (pour les intégrales) puis croissance

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^x \left| \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{d}t \tag{52}$$

   La conclusion est alors la même : on déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\,\mathrm{d}t \right| = 0 \tag{53}$$

   ce qui est la même chose que converger vers 0 sans la valeur absolue.
   - Si $x \leqslant 0$: la croissance de l'intégrale s'écrit en prenant $t \in [x, 0]$ et

$$0 \leqslant \int_x^0 \left| \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t) \right| \mathrm{d}t \leqslant \int_x^0 \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{d}t \tag{54}$$

   mais la conclusion est la même.

Remarque 3. Cette formule peut tout à fait être utilisée par un ordinateur pour calculer $\cos(x)$. La formule converge d'autant plus rapidement que les valeurs de x sont petites.