# DS 1 Mathématiques
# Correction

## Exercice 1

- $(E_1)$ D'abord l'équation est équivalente à $2(e^x)^2 + e^x - 6 = 0$. Posons $y = e^x$. Alors

$$(E_1) \iff \begin{cases} 2y^2 + y - 6 = 0 \\ y = e^x \end{cases} \tag{1}$$

  Or pour cette équation du second degré, on calcule $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = 49 = 7^2$, et donc elle admet deux solutions $y = \frac{-1 \pm 7}{4}$ soit $y_1 = -\frac{8}{4} = -2$ et $y_2 = 62 = \frac{3}{2}$.

  Mais l'équation $e^x = y_1$ n'a pas de solution car $y_1 < 0$. L'unique solution est donc $\boxed{x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$.

- $(E_2)$ On doit raisonner par disjonction de cas, selon le signe de $4x + 1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

(2)

  - Cas $x \geqslant -\frac{1}{4}$ : dans ce cas $|4x + 1| = 4x + 1$ et donc

$$(E_2) \iff 4x + 1 < 5x + 2 \tag{3}$$
$$\iff -1 < x \tag{4}$$

    mais nous travaillons avec $x \geqslant -\frac{1}{4}$. On trouve donc comme ensemble de solutions $\boxed{\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[}$ dans ce cas.

  - Cas $x \leqslant -\frac{1}{4}$ : dans ce cas $|4x + 1| = -(4x + 1) = -4x - 1$ et donc

$$(E_2) \iff -4x - 1 < 5x + 2 \tag{5}$$
$$\iff -3 < 9x \tag{6}$$
$$\iff -\frac{1}{3} < x \tag{7}$$

    mais nous travaillons avec $x \leqslant -\frac{1}{4}$, et $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}$. On trouve comme ensemble de solutions $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right[}$ dans ce cas.

  Conclusion : on réunit les ensembles de solutions et on trouve $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[}$.

- $(E_3)$ L'erreur à ne pas faire est de multiplier des deux côtés par $2x - 3$, dont on ne connait pas le signe… Tout d'abord l'expression n'est pas définie si et seulement si $2x - 3 = 0$ c'est-à-dire $x = \frac{3}{2}$, puis on a

$$(E_3) \iff \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 3} - 1 \geqslant 0 \tag{8}$$
$$\iff \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 3} - \frac{2x - 3}{2x - 3} \geqslant 0 \tag{9}$$
$$\iff \frac{(x^2 - 3x + 1) - (2x - 3)}{2x - 3} \geqslant 0 \tag{10}$$
$$\iff \frac{x^2 - 3x + 1 - 2x + 3}{2x - 3} \geqslant 0 \tag{11}$$
$$\iff \frac{x^2 - 5x + 4}{2x - 3} \geqslant 0 \tag{12}$$
$$\tag{13}$$

Pour le polynôme $x^2-5x+4$, on calcule $\Delta=(-5)^2-4\times1\times4=25-16=9=3^2$, d'où les deux racines $x=\frac{5\pm3}{2}$ soit 1 et 4. Donc $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$. On trace alors un tableau de signes, avec toute l'information que nous avons, et la valeur interdite $\frac{3}{2}$ entre les deux racines :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-4$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $-$ | |
| $\frac{x^2-5x+4}{2x-3}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

(14)

On lit directement : $\boxed{\mathcal{S}=\left[1,\frac{3}{2}\right[\cup\left[4,+\infty\right[}$.

- $(E_4)$ On raisonne soigneusement par disjonction de cas.
  - Cas $m=0$ : ce n'est **pas** une équation de degré 2 donc on ne calcule pas $\Delta$… Dans ce cas $(E_4)$ est équivalente à $6x=0$ donc admet une unique solution : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{0\right\}}$ dans ce cas.

  Sinon, $m\neq0$, on peut poser $\Delta=6^2-4\times2m\times\frac{m}{2}=36-4m^2$, on remarque que $\Delta=4(9-m^2)$. Le signe est donc celui de $9-m^2$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $9-m^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

(15)

  - Cas $m=\pm3$ : alors $\Delta=0$. L'équation admet une unique solution $x=-\frac{6}{2\times2m}=-\frac{3}{2m}$. Donc
    - Si $m=3$ : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{2}\right\}}$.
    - Si $m=-3$ : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}\right\}}$.
  - Cas $m\in]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$ : alors $\Delta<0$. L'équation n'a pas de solutions réelles : $\boxed{\mathcal{S}=\emptyset}$.
  - Cas restant $m\in]-3,0[\cup]0,3[$ : alors $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{4(9-m^2)}}{4m}=\frac{-3\pm\sqrt{9-m^2}}{2m} \tag{16}$$

  D'où les solutions $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{-3-\sqrt{9-m^2}}{2m},\frac{-3+\sqrt{9-m^2}}{2m}\right\}}$ dans ce cas.

On vérifie qu'on a bien donné un ensemble de solutions dans chacun des cas pour $m\in\mathbb{R}$.

## Exercice 2

Il y a deux inclusions à étudier.

- Inclusion $E\subset F$ : soit un élément $(x,y,z)$ de $E$, pour lequel il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $x=3-a$, $y=2a-1$ et $z=2+3a$. Le but est de montrer $(x,y,z)\in F$. On calcule alors

$$2x+y=2(3-a)+(2a-1)=6-2a+2a-1=5 \tag{17}$$

  et

$$3x+z=3(3-a)+(2+3a)=9-3a+2+3a=11 \tag{18}$$

  Ces calculs montrent que $\boxed{(x,y,z)\in F}$, et donc $E\subset F$.

- Inclusion $F \subset E$ : soit un élément $(x,y,z)$ de $F$. On suppose donc $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ avec $2x+y=5$ et $3x+z=11$. Existe-t-il $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = 3-a & (L_1) \\ y = 2a-1 & (L_2) \\ z = 2+3a & (L_3) \end{cases} \quad ? \tag{19}$$

Mais ceci est un système d'équations dont l'inconnue est $a$, et $x, y, z$ sont des paramètres. Avec $(L_1)$, on pose $\boxed{a = 3-x}$. On peut alors remplacer pour voir si cela vérifie $(L_2)$ et aussi $(L_3)$. Alors $(L_2)$ est vérifiée si et seulement si $y = 2(3-x)-1$, c'est-à-dire $y = 6-2x$ : c'est bien le cas par notre hypothèse $2x+y=5$. Et $(L_3)$ est vérifiée si et seulement si $z = 2+3(3-x)$, c'est-à-dire $z = 11-3x$ : c'est bien le cas par notre hypothèse $3x+z=11$. En conclusion $\boxed{a \text{ existe bien}}$, et ceci montre que $\boxed{(x,y,z) \in E}$.

En conclusion on a bien démontré $E = F$.

## Problème 1

1. (a) On a par exemple $\boxed{8 = 7\times 0 + 8 \times 1 \in E}$ et $\boxed{37 = 7\times 3 + 8\times 2 \in E}$.

   (b) Un élément de $E$ est soit 0, soit supérieur à 7 (cas $k \geqslant 1$ ou $\ell \geqslant 1$) donc $\boxed{1 \notin E}$.
   Pour 19, on voit que ce n'est pas un multiple de 8, donc il faut nécessairement le former avec au moins un 7, on peut essayer $19-7=12$ (si ceci était dans $E$, alors en y ajoutant 7, 19 serait aussi dans $E$) mais là encore les plus petits éléments qu'on peut former ($k=0,1,2$ ou $\ell = 0,1,2$) sont 7, 8, 14, 15, 16, mais on ne trouve pas 12, donc $\boxed{19 \notin E}$.

   (c) D'après la question précédente, ou bien à la fin de l'exercice, on a le choix… Les plus petits éléments de $E$ sont écrits ci-dessus, les plus petits qui n'y sont pas sont $1,2,3,4,5,6,9,10,11,12,13$.

   (d) Soient deux entiers $n \in E$ et $m \in E$. Cela signifie qu'il existe $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = 7k+8\ell$, et (d'autres) $(k',\ell') \in \mathbb{N}^2$ tels que $m = 7k'+8\ell'$. On a alors

$$n+m = (7k+8\ell)+(7k'+8\ell') = 7\underbrace{(k+k')}_{\in\mathbb{N}} + 8\underbrace{(\ell+\ell')}_{\in\mathbb{N}} \tag{20}$$

   et $\boxed{\text{ceci montre que } n+m \in E}$.

2. (a) L'ensemble $\left\{ q \in \mathbb{N} \;\middle|\; 7q \leqslant n \right\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ (donc de $\mathbb{Z}$).
   Elle est non-vide, car elle contient au moins 0, en effet $7\times 0 \leqslant n$.
   Elle est majorée, en effet pour tout $q \in \mathbb{N}$ tel que $7q \leqslant n$ alors $q \leqslant \frac{n}{7}$, donc $\frac{n}{7}$ est un majorant.
   On peut donc appliquer soigneusement le théorème du cours une fois qu'on en a vérifié les hypothèses : $\boxed{\text{c'est une partie non-vide et majorée de } \mathbb{Z} \text{ donc le maximum existe}}$. Le maximum est automatiquement dans $\mathbb{N}$, puisque 0 étant dans l'ensemble le maximum est plus grand que 0.

   (b) On pose $r = n-7q$. Par définition $7q \leqslant n$ donc $r \geqslant 0$.
   Justifions que $r < 7$ (comme $r$ est entier naturel alors $r$ sera nécessairement dans $\{0,1,2,3,4,5,6\}$). Supposons par l'absurde que $r \geqslant 7$. Alors on pourrait écrire $n = 7q+r = 7(q+1)+(r-7)$ avec $r-7 \geqslant 0$, autrement dit $q+1$ serait un entier encore plus grand que $q$ et tel que $7(q+1) \leqslant n$. Mais $\boxed{\text{c'est absurde par définition du maximum !}}$
   Cela signifie donc que $r < 7$.

3. (a) Supposons qu'on ait des entiers naturels $q_1$, $r_1$, $q_2$, $r_2$ tels que $(r_1,r_2) \in \{0,1,2,3,4,5,6\}^2$ et avec $7q_1+r_1 = 7q_2+r_2$. On en déduit alors

$$7\underbrace{(q_1-q_2)}_{\in\mathbb{Z}} = r_2 - r_1 \tag{21}$$

   - Si $q_1-q_2=0$ : alors on en déduit immédiatement aussi $r_1 = r_2$.
   - Sinon : $q_1-q_2$ est entier donc $7(q_1-q_2)$ est plus grand que 7 (en valeur absolue). Or, sachant $0 \leqslant r_1 < 7$ et $0 \leqslant r_2 < 7$ on déduit $-7 < r_1 \leqslant 0$ et donc $-7 < r_2 - r_1 < 7$ (on peut aussi énumérer toutes les possibilités pour les valeurs de $r_2-r_1$). C'est donc absurde !

En conclusion : on a $\boxed{q_1 = q_2 \text{ et } r_1 = r_2}$.
En résumé, à la question 2.(b) on a démontré

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (q,r) \in \mathbb{N} \times \{0,1,2,3,4,5,6\} \text{ uniques tels que } n = 7q + r} \tag{22}$$

4. (a) Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 42. À l'aide des résultats précédents, il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ tels que $n = 7q + r$. On remarque que $\boxed{\text{nécessairement } q \geqslant 6}$, en effet sinon $q \leqslant 5$ et $r \leqslant 6$ donc $7q + r \leqslant 7 \times 5 + 6 = 41$. Écrivons comme suggéré $r = -7r + 8r$ on obtient

$$n = 7q + (-7r + 8r) = 7\underbrace{(q - r)}_{=k} + 8\underbrace{r}_{=\ell} \tag{23}$$

Donc $\boxed{\text{on pose } k = q - r \text{ et } \ell = r}$. Il reste à bien justifier que $\ell \in \mathbb{N}$ (OK) et que $k \in \mathbb{N}$ (c'est vrai car $q \geqslant 6$ et $r \leqslant 6$).

(b) Comme dans la question 1.(b), une méthode pour tester si un élément est dans $E$ est de tenter de le diviser par 7 ou par 8, et si ce n'est pas possible, de lui retrancher 7 ou 8 et de recommencer. On peut aussi utiliser la question 1.(d) pour produire des nouveaux éléments de $E$. On trouve ainsi les 21 éléments de $E$ strictement inférieurs à 42 :

$$\boxed{\Big\{0, 7, 8, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 36, 37, 38, 39, 40\Big\}} \tag{24}$$

(c) En conclusion l'ensemble $E$ est la réunion de l'ensemble précédent avec $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 42\}$.

## Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ et on pose la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} \text{ »} \tag{25}$$

Démontrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$

- Initialisation : pour $n = 1$ alors $S_1 = 1$ et la propriété à démontrer est $S_1 \leqslant 2 - \frac{1}{1}$ soit $\boxed{1 \leqslant 1}$. C'est bien vrai.
- (Rien n'empêche de vérifier au brouillon que pour $n = 2$ alors $S_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ et que l'inégalité à montrer est $\frac{5}{4} \leqslant \frac{3}{2}$, ce qui est vrai aussi ; avec $n = 3$, c'est $\frac{49}{36} \leqslant \frac{5}{3}$)
- Hérédité : soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée, c'est-à-dire $S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$. Cela s'écrit

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \tag{26}$$

et, additionnant $\frac{1}{(n+1)^2}$ de chaque côté, on obtient naturellement

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}_{S_{n+1}} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \tag{27}$$

Or notre but est d'arriver à $S_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$. Cela sera le cas, par transitivité, si on arrive à montrer que $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$. Se pourrait-il que cette inégalité soit vraie ?

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1} \tag{28}$$

$$\iff \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \tag{29}$$

$$\iff \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} \tag{30}$$

$$\iff \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n(n+1)} \tag{31}$$

$$\iff n(n+1) \leqslant (n+1)^2 \tag{32}$$

Mais cette dernière condition est bien vraie, car $n \geqslant 1$ (multiplier l'inégalité $n \leqslant n+1$ des deux côtés par $n+1$, ou bien développer). En conclusion on a démontré

$$\boxed{S_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}} \tag{33}$$

et donc on a démontré $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : par récurrence on a bien démontré $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$.

## Problème 2

1. La contraposée de $(*)$ est :
$$\Big(\alpha \neq 0 \text{ ou } \beta \neq 0\Big) \Longrightarrow \alpha + \beta \neq 0$$
Comme $\alpha$, $\beta$ sont positifs (et donc $\alpha + \beta$ aussi), cela signifie que si $\alpha > 0$ ou $\beta > 0$ alors $\alpha + \beta > 0$. C'est bien la règle d'addition des inégalités strictes : dès qu'au moins l'une des deux est stricte, alors la conclusion est stricte. La contraposée dit donc que si une somme de deux termes positifs est nulle, c'est que les deux termes sont nuls.
2. C'est automatique…
$$\text{non(i)} \Longleftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ N(x,y) < 0 \text{ ou } \Big(N(x,y) = 0 \text{ et } (x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0)\Big) \tag{34}$$
$$\text{non(ii)} \Longleftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x, \lambda y) \neq |\lambda| N(x,y) \tag{35}$$
$$\text{non(iii)} \Longleftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists (u,v) \in \mathbb{R}^2\ N(x+u, y+v) > N(x,y) + N(u,v) \tag{36}$$
3. Question un peu longue car il faut traiter chacune des trois propriétés pour chacune des trois fonctions. Pour alléger un peu, on introduit une seule fois les quantificateurs $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ au début de cette réponse…
   - (i) pour $A$ signifie $x + y \geqslant 0$ (ce qui est déjà $\boxed{\text{faux}}$, puisque $x$ et $y$ peuvent être négatifs), et $x + y = 0 \Longrightarrow x = 0$ et $y = 0$ ce qui est tout aussi faux (prendre $x = 1$, $y = -1$).
   - (ii) pour $A$ signifie $\lambda x + \lambda y = |\lambda|(x+y)$. C'est vrai si $\lambda$ est positif (distributivité) mais $\boxed{\text{faux}}$ si $\lambda$ est négatif : prendre $x = y = 1$ et $\lambda = -1$.
   - (iii) pour $A$ signifie $(x+u) + (y+v) \leqslant (x+y) + (u+v)$. C'est $\boxed{\text{vrai}}$, c'est même une égalité.
   - (i) pour $B$ signifie $|x| \geqslant 0$ (vrai) et $|x| = 0 \Longrightarrow x = 0$ et $y = 0$. Mais ce dernier point est $\boxed{\text{faux}}$ : supposant $|x| = 0$ on conclut bien $x = 0$ mais on ne conclut rien sur $y$, autrement dit on peut prendre $x = 0$ et $y = 1$ comme contre-exemple.
   - (ii) pour $B$ signifie $|\lambda x| = |\lambda| \times |x|$. C'est $\boxed{\text{vrai}}$, c'est une règle de calcul de base sur les valeurs absolues (multiplicativité).
   - (iii) pour $B$ signifie $|x+u| \leqslant |x| + |u|$. C'est $\boxed{\text{vrai}}$, c'est l'inégalité triangulaire, peu importe le $\forall y$, $\forall v$.
   - (i) pour $C$ signifie $|x+y| \geqslant 0$ (vrai, c'est une valeur absolue) et $|x+y| = 0 \Longrightarrow x = 0$ et $y = 0$. Ce dernier point est $\boxed{\text{faux}}$ : sachant $|x+y| = 0$, on déduit $x + y = 0$, mais pas plus, autrement dit on peut prendre $x = 1$ et $y = -1$ comme contre-exemple.
   - (ii) pour $C$ signifie $|\lambda x + \lambda y| = |\lambda| \times |x+y|$. C'est $\boxed{\text{vrai}}$ et se démontre en deux étapes, d'abord $|\lambda x + \lambda y| = |\lambda(x+y)|$ (factoriser $\lambda$) puis ceci est égal à $|\lambda| \times |x+y|$ (multiplicativité de la valeur absolue).
   - (iii) pour $C$ signifie $|(x+u) + (y+v)| \leqslant |x+y| + |u+v|$. C'est $\boxed{\text{vrai}}$ et se démontre avec l'inégalité triangulaire appliquée à $|(x+u) + (y+v)|$ qu'on ré-écrit $|(x+y) + (u+v)|$.
4. Vérifions soigneusement chacun des points pour $N_1$.
   - (i) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $N_1(x,y) = |x| + |y| \geqslant 0$ puisque c'est une somme de deux termes positifs. De plus, si $N_1(x,y) = 0$ alors (voir le résultat préliminaire) on en déduit que chacun des deux termes de la somme sont nuls, soit $|x| = 0$ (donc $x = 0$) et $|y| = 0$ (donc $y = 0$). Donc $\boxed{\text{ceci démontre (i) pour } N_1}$.

- (ii) Soit $(y,y) \in \mathbb{R}^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} N_1(\lambda x, \lambda y) &= |\lambda x| + |\lambda y| && (37)\\ &= |\lambda| \times |x| + |\lambda| \times |x| \qquad \text{(multiplicativité)} && (38)\\ &= |\lambda|\Big(|x| + |y|\Big) && (39)\\ &= |\lambda| N_1(x,y) && (40) \end{aligned}$$

Ceci démontre (ii) pour $N_1$.

- (iii) Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} N_1(x+u, y+v) &= |x+u| + |y+v| && (41)\\ &\leqslant \Big(|x|+|u|\Big) + \Big(|y| + |v|\Big) \qquad \text{(inégalité triangulaire, deux fois)} && (42)\\ &= \Big(|x|+|y|\Big) + \Big(|u| + |v|\Big) && (43)\\ &= N_1(x,y) + N_1(u,v) && (44) \end{aligned}$$

Ceci démontre (iii) pour $N_1$ et donc on a bien vérifié que $N_1$ est une norme.

5. (a) On vérifie là encore soigneusement les points.
   - (i) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 0$, et si $\sqrt{x^2+y^2} = 0$ alors $x^2+y^2 = 0$ donc (encore le résultat préliminaire) $x^2 = 0$ et $y^2 = 0$, donc $x = 0$ et $y = 0$. Ceci démontre (i) pour $N_2$.
   - (ii) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors si on est rigoureux

$$\begin{aligned} N_2(\lambda x, \lambda y) &= \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} && (45)\\ &= \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} && (46)\\ &= \sqrt{\lambda^2 (x^2+y^2)} && (47)\\ &= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x^2+y^2} && (48)\\ &= |\lambda| N_2(x,y) && (49) \end{aligned}$$

   car $\sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$, et ceci démontre (ii) pour $N_2$.

   (b) *La question est légèrement mal formulée, ce qui n'empêche pas de démarrer les calculs.*
   Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Comme dans l'inégalité triangulaire vue en cours, on part de l'inégalité à démontrer, et on élève au carré des deux côtés (tout est bien positif), en développant ce qui est possible et en simplifiant des deux côtés :

$$\begin{aligned} & N_2(x+u, y+v) \leqslant N_2(x,y) + N_2(u,v) && (50)\\ \iff & \sqrt{(x+u)^2 + (y+v)^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{u^2+v^2} && (51)\\ \iff & (x+u)^2 + (y+v)^2 \leqslant \Big(\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{u^2+v^2}\Big)^2 && (52)\\ \iff & (x^2+u^2+2xu) + (y^2+v^2+2yv) \leqslant (x^2+y^2) + (u^2+v^2) + 2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2} && (53)\\ \iff & 2xu + 2yv \leqslant 2\sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)} && (54)\\ \iff & xu + yv \leqslant \sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)} && (55) \end{aligned}$$

   Il reste à élever au carré des deux côtés pour aboutir à $(xu+yv)^2 \leqslant (x^2+y^2)(u^2+v^2)$. Ce n'est pas tout à fait une équivalence, mais on aura dans tous les cas

$$xu + yv \leqslant |xu + yv| \tag{56}$$

   et là on bien l'équivalence (puisque encore une fois tout est positif)

$$|xu+yv| \leqslant \sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)} \iff (xu+yv)^2 \leqslant (x^2+y^2)(u^2+v^2) \tag{57}$$

   Ainsi, pour démontrer (iii) pour $N_2$ il suffit d'établir l'inégalité $(xu+yv)^2 \leqslant (x^2+y^2)(u^2+v^2)$.

(c) En développant des deux côtés, on trouve aisément

$$(xu+yv)^2+(xv-yu)^2 = (x^2u^2+y^2v^2+2xuyv)+(x^2v^2+y^2u^2-2xvyu) \tag{58}$$
$$(x^2+y^2)(u^2+v^2) = x^2u^2+y^2u^2+x^2v^2+y^2v^2 \tag{59}$$

Ces deux termes sont égaux car le $2xuyv = 2xvyu$ se simplifie dans le premier.
On a alors

$$(x^2+y^2)(u^2+v^2)-(xu+yv)^2 = (xv-yu)^2 \geqslant 0 \tag{60}$$

ce qui démontre l'inégalité voulue. Par équivalences, on a démontré (iii) pour $N_2$ (de même que pour démontrer l'inégalité triangulaire, on raisonne par équivalences et on aboutit à une inégalité vraie).
En conclusion on a bien montré que $N_2$ est une norme.

6. La négation s'écrit automatiquement :

$$\boxed{\forall C>0,\ \exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ N'(x,y) > C\times N(x,y)} \tag{61}$$

7. (a) Soient $N$, $N'$, $N''$ trois normes. On suppose que $N$ est plus fine que $N'$ : il existe un réel $C>0$ tel que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $N'(x,y)\leqslant CN(x,y)$. On suppose de plus que $N'$ est plus fine que $N''$, donc il existe un réel $C'>0$ tel que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $N''(x,y)\leqslant C'N'(x,y)$. Le but est de trouver une constante $C''$ telle que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $N''(x,y)\leqslant C''N(x,y)$.
Mais, sachant $N'(x,y)\leqslant CN(x,y)$ et $N''(x,y)\leqslant C'N'(x,y)$ on déduit $N''(x,y)\leqslant C'CN(x,y)$. Conclusion : on pose $C''=CC'$ et alors $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $N''(x,y)\leqslant C''N(x,y)$ ce qui démontre que $N$ est plus fine que $N''$.

(b) Cela signifie précisément que la relation « être plus fine » est transitive.

8. Cela signifie que tout norme $N$ est plus fine qu'elle même, autrement dit quelque soit la norme $N$ il existe $C>0$ tel que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $N(x,y)\leqslant CN(x,y)$. Mais c'est bien évident si on pose $C=1$…

9. (a) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, alors

$$(|x|+|y|)^2 = |x|^2+|y|^2+2\times|x|\times|y| \tag{62}$$
$$= x^2+y^2+2\times|x|\times|y| \tag{63}$$

L'inégalité $x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2$ est donc équivalente à $x^2+y^2\leqslant x^2+y^2+2\times|x|\times|y|$ c'est-à-dire $0\leqslant 2\times|x|\times|y|$, ce qui est vrai.

(b) Par cette inégalité, où tous les termes sont positifs, on déduit en passant à la racine carrée

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{N_2(x,y)}\leqslant \underbrace{|x|+|y|}_{N_1(x,y)}} \tag{64}$$

Ceci montre que $N_1$ est plus fine que $N_2$ (on pose $C=1$).

10. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Partons de l'inégalité à démontrer :

$$N_1(x,y)\leqslant\sqrt{2}N_2(x,y) \tag{65}$$
$$\iff |x|+|y|\leqslant\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \tag{66}$$
$$\iff \Big(|x|+|y|\Big)^2\leqslant 2(x^2+y^2) \qquad \text{(tout est positif)} \tag{67}$$
$$\iff |x|^2+|y|^2+2\times|x|\times|y|\leqslant 2(x^2+y^2) \tag{68}$$
$$\iff x^2+y^2+2|xy|\leqslant 2x^2+2y^2 \tag{69}$$
$$\iff 2|xy|\leqslant x^2+y^2 \tag{70}$$

Cette dernière peut par exemple se démontrer par disjonction de cas :

- Si $xy\geqslant 0$ : alors $|xy|=xy$ et il s'agit de démontrer $2xy\leqslant x^2+y^2$. Mais ceci est équivalent à $x^2-2xy+y^2\geqslant 0$ et on reconnait $(x-y)^2\geqslant 0$, donc c'est bien vrai.

- Si $xy \leqslant 0$ : alors $|xy| = -xy$ et il s'agit démontrer $-2xy \leqslant x^2+y^2$, qui est équivalent à $x^2+2xy+y^2 \geqslant 0$ et on reconnait $(x+y)^2 \geqslant 0$ donc c'est vrai.

Conclusion : dans tous les cas on a $\boxed{2|xy| \leqslant x^2+y^2}$ et donc, suivant notre raisonnement $\boxed{\text{par équivalences on a montré } N_1(x,y) \leqslant \sqrt{2}N_2(x,y)}$. Ceci démontre que $\boxed{N_2 \text{ est plus fine que } N_1}$ (prendre $C = \sqrt{2}$).

*Remarque* 1. (a) On peut aussi éviter la disjonction de cas en écrivant l'inégalité à démontrer sous forme $2 \times |x| \times |y| \leqslant |x|^2 + |y|^2$ (cela ramène au premier cas ci-dessus).

(b) Le fait que simultanément $N_1$ est plus fine que $N_2$, et que $N_2$ est plus fine que $N_1$, ne signifie pas que la relation « être plus fine » est symétrique : il s'agit bien d'un cas spécial, en général une norme peut être plus fine qu'une autre sans réciproque…

11. (a) On suppose que $N$ est plus fine que $N'$, on se donne donc $C > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $N'(x,y) \leqslant CN(x,y)$. On se donne aussi un $r > 0$.

Analyse : on cherche $r' > 0$ tel que $B_N(r) \subset B_{N'}(r')$. Cette dernière condition signifie que si $(x,y) \in B_N(r)$ (c'est-à-dire $N(x,y) < r$) alors $(x,y) \in B_{N'}(r')$ (c'est-à-dire $N'(x,y) < r'$). Or si $N(x,y) < r$ on déduit $N'(x,y) \leqslant Cr$. Si on choisit $r'$ tel que $r' \leqslant Cr$ on aura alors bien $N'(x,y) < r'$, ce qui montrera $(x,y) \in B_{N'}(r')$.

Synthèse : $\boxed{\text{on pose } r' = Cr}$. Par les calculs ci-dessus on a $N(x,y) < r \implies N'(x,y) < r'$ et $\boxed{\text{ceci démontre } B_N(r) \subset B_{N'}(r')}$.

(b) La réciproque est : supposons que pour tout $r > 0$, il existe $r' > 0$ tel que $B_N(r) \subset B_{N'}(r')$, alors il existe $C > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $N'(x,y) \leqslant CN(x,y)$.

Analyse : supposant l'hypothèse, on peut l'appliquer avec $r = 1$. On trouve donc un $r'$ tel que $B_N(1) \subset B_{N'}(r')$, c'est-à-dire tel que si $N(x,y) < 1$ alors $N'(x,y) < r'$. Or, grâce à (ii), cela détermine tout $N$ : quelque soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si $(x,y) \neq (0,0)$, on pose $\lambda = \frac{1}{2N(x,y)} > 0$ et alors

$$N(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| N(x,y) = \frac{1}{2N(x,y)} \times N(x,y) = \frac{1}{2} < 1 \tag{71}$$

donc $(\lambda x, \lambda y) \in B_N(1/2)$. On peut alors en déduire $N'(\lambda x, \lambda y) < r'$, ce qui donne $\lambda N'(x,y) < r'$, soit

$$N'(x,y) < \frac{r'}{\lambda} = 2r'N(x,y) \tag{72}$$

Synthèse : $\boxed{\text{posons } C = 2r'}$ ($r'$ donné par l'hypothèse appliquée avec $r = 1$), les calculs montrent que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $N'(x,y) \leqslant CN(x,y)$ donc $\boxed{N \text{ est plus fine que } N'}$.