Correction
DS 1 Mathématiques

Durée : 3 heures. Calculatrices et documents non autorisés.
Les exercices et les problèmes peuvent être traités indépendamment et dans l'ordre au choix. Cependant, dans les problèmes, il y a une certaine progression logique et parfois une dépendance entre les questions et, même s'il est possible de sauter une question, il est bon de prendre son temps pour lire les énoncés et de comprendre la structure globale du problème.
Le but n'est pas d'absolument terminer tout, mais de ***bien*** *faire.*

Exercice 1. Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_1) \quad x = 2\sqrt{3-x} \qquad\qquad (E_2) \quad \frac{2x^2+2x-7}{x-4} \leqslant 1$$

$$(E_3) \quad |2x^2-5x-3| \leqslant x^2+3 \qquad\qquad (E_4) \quad \lfloor \sqrt{x^2+1} \rfloor = 2$$

Correction. (E_1) Domaine de définition : il faut $3-x \geqslant 0$ donc $x \leqslant 3$. Puis **si** x est solution de (E_1) **alors** en élevant au carré $x^2 = 4(3-x) \Leftrightarrow x^2+4x-12 = 0$. On factorise : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 64 = 8^2$, racines $-6, 2$. **Or** (*réciproquement*) 2 est bien solution de (E_1) mais pas -6. Donc la seule solution de l'équation est $x = 2$.

(E_2) Domaine de définition : il faut $x-4 \neq 0$ soit $x \neq 4$. Puis

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff \frac{2x^2+2x-7}{x-4} - 1 \leqslant 0 \\ &\iff \frac{(2x^2+2x-7)-(x-4)}{x-4} \leqslant 0 \\ &\iff \frac{2x^2+x-3}{x-4} \leqslant 0.\end{aligned}$$

Au numérateur on factorise : $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 = 5^2$, racines $1, -\frac{3}{2}$, en fait

$$(E_2) \iff \frac{(x-1)(2x+3)}{x-4} \leqslant 0$$

Il s'agit alors de tracer un tableau de signe avec les trois valeurs remarquables rangées par ordre croissant $-\frac{3}{2}$, 1, 4.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		4		$-\infty$
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x+3)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x-4)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{(x-1)(2x+3)}{x-4}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Puis on répond directement en lisant le tableau de signe en faisant bien attention à exclure 4 : l'ensemble des solutions est

$$]-\infty, -\tfrac{3}{2}] \cup [1, 4[$$

(E_3) Il faut nécessairement distinguer les cas selon le signe de $2x^2-5x-3$; on commence donc par étudier cette expression. Ici $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 49 = 7^2$, racines $3, -\frac{1}{2}$, signe positif hors des racines et négatif entre.

— Cas $x \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $x \geqslant 3$: alors

$$\begin{aligned}(E_3) &\iff 2x^2-5x-3 \leqslant x^2+3 \\ &\iff x^2-5x-6 \leqslant 0\end{aligned}$$

ce qui demande une nouvelle fois de factoriser ! Ici $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 49 = 7^2$, racines $6, -1$, négatif entre les racines. Il y a donc des solutions pour $-1 \leqslant x \leqslant 6$. Combinant avec notre cas : si $x \leqslant -\frac{1}{2}$ alors nous avons trouvé des solutions de (E_3) pour $-1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}$, et si $x \geqslant 3$ alors nous avons trouvé des solutions de (E_3) pour $3 \leqslant x \leqslant 6$.

— Cas $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3$: alors

$$\begin{aligned}(E_3) &\iff -(2x^2-5x-3) \leqslant x^2+3 \\ &\iff -2x^2+5x+3 \leqslant x^2+3 \\ &\iff 0 \leqslant 3x^2-5x \\ &\iff 0 \leqslant x(3x-5)\end{aligned}$$

Ici l'expression est déjà factorisée, racines 0, $\frac{5}{3}$, positif hors des racines. On a donc des solutions de (E_3) pour $x \leqslant 0$ (donc dans notre cas $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0$) et pour $x \geqslant \frac{5}{3}$ (donc dans notre cas $\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 3$).

— Résumons : nous avons trouvé comme ensemble de solutions

$$[-1, -\tfrac{1}{2}] \cup [-\tfrac{1}{2}, 0] \cup [\tfrac{5}{3}, 3] \cup [3, 6]$$

et ceci est la même chose que

$$[-1, 0] \cup [\tfrac{5}{3}, 6]$$

(E_4) Domaine de définition : pas de problème. Puis la condition $\lfloor \sqrt{x^2+1} \rfloor = 2$ est **équivalente** à $2 \leqslant \sqrt{x^2+1} < 3$ qui est encore **équivalente** (ici $x^2+1>0$: pas de problème) à $4 \leqslant x^2+1 < 9 \Leftrightarrow 3 \leqslant x^2 < 8$. L'ensemble des solutions est donc

$$]-\sqrt{8}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{8}[$$

(avec $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$).

□

Exercice 2. Montrer par récurrence sur l'entier $n \geqslant 0$ que

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} \tag{1}$$

Correction. On pose $S_n = 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2$, remarquer qu'ici pour $n=0$ alors $S_0 = 1^2 = 1$ car c'est $(2\times 0+1)^2$. Posons l'hypothèse de récurrence $P(n)$: « $S_n = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$ ». Alors :

— Initialisation : pour $n=0$, d'une part $S_0 = 1$, d'autre part $\frac{(0+1)(2\times 0+1)(2\times 0+3)}{3} = \frac{3}{3} = 1$. Ceci démontre que $P(0)$ est vraie.

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$. Pour montrer $P(n+1)$ on commence à calculer :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2+(2(n+1)+1)^2 \\ &= S_n + (2n+3)^2 \\ \text{(hypothèse de récurrence)} \quad &= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + (2n+3)^2 \\ \text{(factoriser } 2n+3\text{)} \quad &= (2n+3)\frac{(n+1)(2n+1)+3(2n+3)}{3} \end{aligned}$$

À ce stade on risque de perde le fil : le but est d'arranger cette expression pour arriver à

$$\begin{aligned} \frac{((n+1)+1)(2(n+1)+1)(2(n+1)+3)}{3} &= \frac{(n+2)(2n+3)(2n+5)}{3} \\ &= (2n+3)\frac{(n+2)(2n+5)}{3} \\ &= (2n+3)\frac{(2n^2+9n+10)}{3} \end{aligned}$$

Or en reprenant les calculs :

$$\begin{aligned} (2n+3)\frac{(n+1)(2n+1)+3(2n+3)}{3} &= (2n+3)\frac{(2n^2+3n+1)+(6n+9)}{3} \\ &= (2n+3)\frac{(2n^2+9n+10)}{3} \end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité voulue pour démontrer $P(n+1)$.

— Par récurrence, on a bien montré $\forall n \geqslant 0,\ P(n)$.

□

Premier problème

On fixe un ensemble E. Pour un nombre infini A_0, A_1, … de parties de E, qu'on note $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on **définit** leur *union infinie* par la condition

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in E \mid \exists n \in \mathbb{N},\, x \in A_n\} \subset E \tag{2}$$

et on définit de même leur *intersection infinie* par

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\, x \in A_n\} \subset E \tag{3}$$

1. (a) On suppose que $A_n = E$ pour tout $n \geqslant 2$. Montrer à partir de cette définition que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0 \cap A_1 \tag{4}$$

Correction. — Inclusion $\subset$: soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n$. En particulier (avec $n = 0$), $x \in A_0$. Avec $n = 1$, on déduit aussi $x \in A_1$. Donc $x \in A_0 \cap A_1$.

— Inclusion $\supset$: soit $x \in A_0 \cap A_1$. Alors $x \in A_0$ (donc $x \in E$) et aussi $x \in A_1$. Donc pour tout $n \geqslant 0$:
  - — si $n = 0$: $x \in A_0$ est bien vrai,
  - — si $n = 1$: $x \in A_1$ est bien vrai,
  - — si $n \geqslant 2$: $x \in A_n = E$ est vrai aussi.

  Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n$ ce qui signifie $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

□

(b) On suppose que $A_n = \emptyset$ pour tout $n \geqslant 2$. De même, montrer que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0 \cup A_1 \tag{5}$$

Correction. — Inclusion $\supset$: soit $x \in A_0 \cup A_1$, alors
  - — si $x \in A_0$: pour $n = 0$, $x \in A_n$,
  - — si $x \in A_1$: pour $n = 1$, $x \in A_n$.

  Ceci démontre bien $\exists n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n$. Donc $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

— Inclusion $\subset$: soit $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il existe alors un $n \geqslant 0$ tel que $x \in A_n$.
  - — si $n = 0$: c'est que $x \in A_0$,
  - — si $n = 1$: c'est que $x \in A_1$,
  - — si $n \geqslant 2$: c'est que $x \in \emptyset$, or ceci est toujours faux, donc ce cas n'arrive jamais.

  Cela montre donc que $x \in A_0$ ou $x \in A_1$, donc $x \in A_0 \cup A_1$.

□

2. On suppose $E = \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1[= [0, +\infty[\tag{6}$$

On pourra utiliser la fonction partie entière pour l'inclusion $\supset$.

Correction. Ici $A_n = [n, n+1[$.

— Inclusion $\subset$: soit $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il existe donc un entier $n \in \mathbb{N}$ (donc $n \geqslant 0$) tel que $x \in [n, n+1[$. Donc en particulier $x \geqslant n \geqslant 0$ donc $x \in [0, +\infty[$.

— Inclusion $\supset$: soit $x \in [0, +\infty[$. On sait qu'il existe un nombre $n \in \mathbb{Z}$, la partie entière de x, tel que $n \leqslant x < n + 1$. Donc $x \in [n, n+1[$. Pour terminer il reste à vérifier que $n \geqslant 0$ (c'est à dire que si $x \geqslant 0$ alors $\lfloor x \rfloor \geqslant 0$) pour impliquer $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1[$. Cela semble évident mais… c'est un petit raisonnement par contraposée : sinon on aurait $n < 0$ et comme n est entier alors $n \leqslant -1$, et l'inégalité $x < n + 1$ implique alors $x < 0$.

□

3. Démontrer les *lois de Morgan infinies* (le complémentaire signifie complémentaire dans E) :

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \tag{7}$$

Correction. On peut très bien raisonner directement par équivalence, en étant bien précis sur les étapes :

— Première loi : soit $x \in E$ alors

$$\begin{aligned} x \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} &\iff \text{non}\left(x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \\ &\iff \text{non}\,(\exists n \in \mathbb{N},\, x \in A_n) \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\, \text{non}(x \in A_n) \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\, x \in \overline{A_n} \\ &\iff x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \end{aligned}$$

— De même, deuxième loi : soit $x \in E$ alors

$$\begin{aligned} x \in \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} &\iff \text{non}\left(x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \\ &\iff \text{non}\,(\forall n \in \mathbb{N},\, x \in A_n) \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N},\, \text{non}(x \in A_n) \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N},\, x \in \overline{A_n} \\ &\iff x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \end{aligned}$$

□

4. On suppose dans cette question $E = \mathbb{R}$.

(a) Démontrer que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\tfrac{1}{n+1}, 1\right] = \left]0, 1\right] \tag{8}$$

Correction. Ici $A_n = \left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$.

— Inclusion $\subset$: soit $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$. En particulier $x \geqslant \frac{1}{n+1} > 0$, et aussi $x \leqslant 1$, donc $x \in \left]0, 1\right]$.

— Inclusion $\supset$: soit $x \in \left]0, 1\right]$. Alors d'une part $x \leqslant 1$, et d'autre part le but est de trouver un entier $n \geqslant 0$ tel que $\frac{1}{n+1} \leqslant x$. Or cette condition est équivalente à

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{n+1} \leqslant x &\iff \frac{1}{x} \leqslant n+1 \quad (\text{car } x \neq 0) \\ &\iff \frac{1}{x} - 1 \leqslant n. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre un nombre entier $n \geqslant \frac{1}{x} - 1$, et alors $x \in \left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$.

□

(b) On suppose qu'on a des parties $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions suivantes : pour tout $n \geqslant 0$,

$$(C_1) \quad A_n \subset [0, +\infty[\qquad (C_2) \quad A_n \subset A_{n+1} \qquad (C_3) \quad A_n \text{ admet un minimum } m_n$$

i. Montrer que l'union infinie des $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

Correction. On montre qu'elle est minorée par 0 : en effet si $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_n$ or la condition (C_1) implique que $x \in [0, +\infty[$ donc $x \geqslant 0$. Ceci démontre : $\forall x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $x \geqslant 0$. □

ii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m_{n+1} \leqslant m_n$.

Correction. m_n est le minimum de A_n donc $m_n \in A_n$. Par la condition (C_2), $m_n \in A_{n+1}$ du coup. Mais m_{n+1} est le minimum de A_{n+1} ce qui signifie $\forall x \in A_{n+1}$, $m_{n+1} \leqslant x$. En particulier (pour $x = m_n$) on trouve $m_{n+1} \leqslant m_n$. □

iii. Peut-on conclure que l'union infinie des $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un minimum ? Une borne inf ?

Correction. L'exemple de la question précédente avec $A_n = \left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$ vérifie bien les conditions ci-dessus :

— (C_1) : on a déjà vu que si $x \in \left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$ alors $x > 0$ donc en particulier $x \geqslant 0$,

— (C_2) : il s'agit de montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $\left[\frac{1}{n+2}, 1\right] \subset \left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$. Ce qui revient simplement à dire : si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $x \geqslant \frac{1}{n+1}$ alors $x \geqslant \frac{1}{n+2}$. Mais c'est vrai car $0 < n+1 < n+2$ donc $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$ donc c'est la transitivité.

— (C_3) : l'intervalle $\left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$ admet pour minimum sa borne inférieure $\frac{1}{n+1}$.

Or l'intervalle $]0, 1]$ n'admet pas de minimum, mais une borne inf.

Cet exemple démontre qu'on ne peut pas conclure en toute généralité que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ admet un minimum. Par contre, c'est bien une partie de $\mathbb{R}$, dont on a montré qu'elle était minorée, et non-vide (en effet les parties A_n sont non-vides car elles contiennent au moins un élément : leur minimum ! et donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ contient au moins les éléments m_n) donc elle admet une borne inf. □

Second problème

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et tout réel $a \in A$, on dit que a est **un point isolé** de A si la propriété suivante est vérifiée :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= \{a\}. \tag{$*$}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n est un point isolé de $\mathbb{N}$.

Correction. Posons $\varepsilon = 1$ et montrons que $\mathbb{N} \cap]n-1, n+1[= \{n\}$: bien entendu l'inclusion $\supset$ est toujours vraie, et pour $\subset$ il s'agit de montrer que si un nombre $m \in \mathbb{N}$ vérifie $m \in \mathbb{N} \cap]n-1, n+1[$ alors $m = n$. Mais cette condition signifie $n - 1 < m < n + 1$, donc $-1 < m - n < 1$ avec $m - n$ qui est entier. Cela n'est possible que si $m - n = 0$, donc $m = n$. □

2. Existe-t-il un point de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas isolé ? Justifier.

Correction. Exactement la **même** preuve montre que tous les points de $\mathbb{Z}$ sont isolés. □

3. (a) Écrire la négation de la propriété $(*)$.

Correction.

$$\text{non}(*) : \quad \forall \varepsilon > 0,\ A \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\neq \{a\}$$

Remarque : l'inclusion $\supset$ étant toujours vraie (car $\varepsilon > 0$ donc $a - \varepsilon < a < a + \varepsilon$), il s'agit de montrer que dans $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ il existe *au moins* un élément de A autre que a, et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. □

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que x n'est pas un point isolé de $\mathbb{R}$.

Correction. Soit $\varepsilon > 0$. Posons par exemple $y = x + \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $y \in \mathbb{R}$ et $x < x + \frac{\varepsilon}{2} < x + \varepsilon$, donc y est bien un élément de $\mathbb{R}$ qui est différent de x et qui est dans $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. □

4. (a) Dans cette question, on fixe un nombre rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, un nombre réel $\varepsilon > 0$, et un entier $n \in \mathbb{N}$ supérieur à $2/\varepsilon$. Montrer que :

$$\text{si on pose } r = \frac{np + q}{nq} \in \mathbb{Q} \quad \text{alors} \quad 0 < \left| r - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon. \tag{9}$$

Correction. C'est un simple calcul : $r - \frac{p}{q} = \frac{np+q}{nq} - \frac{np}{nq} = \frac{q}{nq} = \frac{1}{n}$. Donc en valeur absolue ceci est bien > 0, et la condition $\frac{1}{n} < \varepsilon$ est vérifiée car $n > \frac{1}{\varepsilon}$ car $n \geqslant \frac{2}{\varepsilon}$. □

(b) En déduire qu'aucun point de $\mathbb{Q}$ n'est isolé.

Correction. Résumons : soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et montrons que ce nombre n'est pas isolé dans $\mathbb{Q}$. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons un entier $n \in \mathbb{N}$ supérieur à $\frac{2}{\varepsilon}$ et posons $r = \frac{np+q}{nq}$. Ceci est bien dans $\mathbb{Q}$ et la question précédente montre que $\frac{p}{q} - \varepsilon < r < \frac{p}{q} + \varepsilon$. De plus le nombre r est bien différent de $\frac{p}{q}$ car $0 \neq \left| r - \frac{p}{q} \right|$. C'est donc r le nombre recherché qui permet de nier que $\frac{p}{q}$ est isolé. □

5. (a) Soit $B = [1, 2] \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point isolé de B.

Correction. Il faut montrer deux choses :

- 0 est isolé : soit $\varepsilon = 1$. Alors un élément x dans B et dans $]0-1, 0+1[$ vérifie à la fois $x < 1$ et $x \in [1,2] \cup \{0\}$: c'est 0.
- Les autres points $a \in [1,2]$ ne sont pas isolés : soit $\varepsilon > 0$.
  - Si $a = 1$ on peut prendre un point x tel que $1 < x < 1 + \varepsilon$ et $x \leqslant 2$ (x est un nombre réel strictement entre 1 et $\min(1+\varepsilon, 2) > 1$) alors $a \neq x \in B \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.
  - Idem si $a = 2$ on peut prendre x tel que $2 - \varepsilon < x < 2$ et $1 \leqslant x$, c'est à dire x strictement entre $\max(2-\varepsilon, 1) < 2$ et 2.
  - Si $1 < a < 2$ alors (on peut prendre au choix x « à droite ou à gauche », par exemple à droite) il faut un élément x tel que $a < x < a + \varepsilon$ et $a < x \leqslant 2$, donc x strictement entre a et $\min(a+\varepsilon, 2) > a$.

$\square$

(b) Soit $C = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point non isolé de C.

Correction. Là encore il faut montrer deux choses :

- 0 est non isolé : soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver un élément $0 \neq x \in C$ tel que $x < \varepsilon$. Or cela revient à trouver un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ et (on a déjà vu) cela revient à prendre un nombre entier $n > \frac{1}{\varepsilon}$.
- Les autres points sont isolés : soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que $a = \frac{1}{n}$ est isolé. Un petit dessin (et l'intuition que les $\frac{1}{n}$ sont « de plus en plus resserrés ») invite à poser $\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Montrons que cela convient pour avoir $C \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \{a\}$: soit un nombre x dans cette intersection, qu'on écrit $x = \frac{1}{m}$ pour $m \in \mathbb{N}^*$. Alors l'inégalité du côté gauche $a - \varepsilon < x$ se ré-écrit tout simplement $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{m}$ d'où on déduit $m < n+1$. De l'autre côté l'inégalité de droite $x < a + \varepsilon$ se ré-écrit $\frac{1}{m} < \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1}$ et le but est de montrer que cela implique $n - 1 < m$: alors on aura bien que m est le seul nombre entier avec $n-1 < m < n+1$ donc $n = m$ c'est à dire $x = a$. Or : si $n = 1$ il n'y a en fait déjà pas d'élément x de C avec $x > 1$ (la condition $m < n+1$ avec $n = 1$ et $m \in \mathbb{N}^*$ implique déjà $m = 1$), et donc il suffit de montrer que $\frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n-1}$, alors on aura $\frac{1}{m} < \frac{1}{n-1}$ donc $m > n-1$. Mais l'inégalité à démontrer est équivalente à $(n-1)(2(n+1)-n) < n(n+1)$ et ceci se simplifie en $-2 < 0$: c'est donc vrai.

$\square$

6. Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. Démontrer que a est un point isolé de A si et seulement si la propriété suivante est vérifiée :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon] = \{a\}. \tag{$**$}$$

Correction.
- $(**) \Longrightarrow (*)$ est vraie « directement » : supposons que a soit isolé au sens de $(**)$, donc il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $A \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon] = \{a\}$. Alors pour ce **même** ε, $A \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \{a\}$: en effet un élément $x \in A \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ est aussi dans $A \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, donc par $(**)$ est égal à a.
- Pour $(*) \Longrightarrow (**)$: supposons que A soit isolé au sens de $(*)$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \{a\}$. Il s'agit alors de voir que dans ce cas $A \cap [a-\frac{\varepsilon}{2}, a+\frac{\varepsilon}{2}] = \{a\}$: c'est parce que si $x \in [a-\frac{\varepsilon}{2}, a+\frac{\varepsilon}{2}]$ alors $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ (la première condition se traduit par $|x-a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et implique la seconde qui se traduit par $|x-a| < \varepsilon$), donc si en plus $x \in A$ on en déduit par $(*)$ que $x = a$. Ainsi, on pose $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ le nombre tel que $A \cap [a-\varepsilon', a+\varepsilon'] = \{a\}$ et donc a est isolé au sens $(**)$.

$\square$