DS 1 Mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) Le plus simple est d'utiliser une table de vérité, ici coupée sur deux lignes.

P	Q	R	Q et R	non(Q et R)	P et non(Q et $\mathbb{R}$)
V	V	V	V	F	F
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F

(1)

non(Q)	P et non(Q)	non(R)	P et non(R)	(P et non(R)) ou (P et non(R))
F	F	F	F	F
F	F	V	V	V
V	V	F	F	V
V	V	V	V	V
F	F	F	F	F
F	F	V	F	F
V	F	F	F	F
V	F	V	F	F

(2)

Les deux colonnes les plus à droite sont les mêmes, donc les assertions sont équivalentes. Alternativement, on peut y arriver avec les lois de Morgan et la distributivité :

$$P \text{ et non}(Q \text{ et } R) \equiv P \text{ et } \Big(\text{non}(Q) \text{ ou non}(R)\Big) \qquad \text{(Morgan)} \tag{3}$$
$$\equiv (P \text{ et non}(Q)) \text{ ou } (P \text{ et non}(R)) \qquad \text{(distributivité de } \textit{et} \text{ sur } \textit{ou}\text{)} \tag{4}$$

(b) Il s'agit d'utiliser ce qu'on vient de démontrer, en rédigeant. Pour tout élément x, on a la suite d'équivalences suivante :

$$x \in A \setminus (B \cap C) \iff (x \in A) \text{ et non}(x \in B \cap C) \tag{5}$$
$$\iff (x \in A) \text{ et non } \Big((x \in B) \text{ et } (x \in C)\Big) \tag{6}$$
$$\iff (x \in A \text{ et non}(x \in B)) \text{ ou } (x \in A \text{ et non}(x \in C)) \qquad \text{(question précédente)} \tag{7}$$
$$\iff (x \in A \setminus B) \text{ ou } (x \in A \setminus C) \tag{8}$$
$$\iff x \in \Big((A \setminus B) \cup (A \setminus C)\Big) \tag{9}$$

Cela est valable pour tout x et démontre l'égalité entre ensembles.

2. Montrons séparément les deux inclusions.
Inclusion $E \subset F$: soit $a \in \mathbb{R}$, posons $(x, y) = (3a - 1, 2 - 5a) \in \mathbb{R}^2$ un élément de E. Alors on calcule

$$5x + 3y = 5(3a - 1) + 3(2 - 5a) = 15a - 5 + 6 - 15a = 1 \tag{10}$$

Ceci démontre que $(x, y) \in F$.
Inclusion $F \subset E$: soit $(x, y) \in R^2$, supposons $5x + 3y = 1$. Existe-t-il $a \in \mathbb{R}$ tel que $x = 3a - 1$ et $y = 2 - 5a$? Cela revient à déterminer si le système suivant, **dont l'inconnue est** a, admet une solution :

$$\begin{cases} x = 3a - 1 \\ y = 2 - 5a \end{cases} \iff \begin{cases} 3a = x + 1 & (L_1) \\ 5a = 2 - y & (L_2) \end{cases} \tag{11}$$

Alors (L_1) impose de prendre $a = \frac{x+1}{3}$. Mais cette valeur de a vérifie-t-elle aussi (L_2) ? C'est le cas si et seulement si

$$
\begin{aligned}
& 5\left(\frac{x+1}{3}\right) = 2 - y && (12)\\
\iff & 5(x+1) = 3(2-y) && (13)\\
\iff & 5x + 5 = 6 - 6y) && (14)\\
\iff & 5x + 6y = 1 && (15)
\end{aligned}
$$

Cette dernière condition étant par hypothèse bien vérifiée, le système admet bien une solution a et donc ceci démontre que $(x, y) \in E$.

Conclusion : par double inclusion on a bien montré l'égalité des deux ensembles.

3. Montrons par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{1 + 5 + 9 + \cdots + (4n+1) = (n+1)(2n+1)}_{P(n)} \tag{16}$$

Attention car la récurrence commence bien à $n = 0$ (le premier terme vaut alors bien 1), sur son brouillon on peut aussi facilement se convaincre du cas $n = 1$ et $n = 2$.

Initialisation : pour $n = 0$ la somme de gauche ne contient qu'un seul terme et est simplement égale à 1. Le terme de droite lui est égal à $(0+1)(2 \times 0 + 1) = 1$. Les deux sont bien égaux et donc $P(0)$ est bien vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie. Alors

$$
\begin{aligned}
1 + 5 + 9 + \cdots + (4(n+1)+1) &= 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n+5) && (17)\\
&= (1 + 5 + 9 + \cdots + (4n+1)) + (4n+5) && (18)\\
&= (n+1)(2n+1) + (4n+5) \qquad \text{(en utilisant } P(n)) && (19)\\
&= n^2 + 2n + n + 1 + 4n + 5 && (20)\\
&= n^2 + 7n + 6 && (21)
\end{aligned}
$$

Mais d'autre part (ou alors en factorisant directement)

$$
\begin{aligned}
((n+1)+1) \times (2(n+1)+1) &= (n+2)(2n+3) && (22)\\
&= n^2 + 7n + 6 && (23)
\end{aligned}
$$

Ces deux termes sont égaux, et ceci permet de démontrer que $P(n+1)$ est bien vraie.

Conclusion : par récurrence on a bien démontré que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Problème 1

1. D'abord $\mathbb{N} \setminus \{7\}$ est l'ensemble de tous les entiers naturels, auxquels on retire le nombre 7.

   En posant $p = 8$ (car l'inégalité est large) on trouve bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant p$ alors c'est que $n \in \mathbb{N} \setminus \{7\}$. Cela ne marche pas si on prend $p = 7$ ou plus petit, car alors on peut choisir $n = 7$ mais $n \notin A$.

2. (a) Question qu'on peut faire très formellement :

$$\text{non}(*) \quad \iff \quad \forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \text{ et } n \notin A \tag{24}$$

   (b) Démontrons pour P la négation de $(*)$, qu'on vient d'écrire juste au-dessus. Soit $p \in \mathbb{N}$. Il s'agit de trouver un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$ mais $n \notin P$, autrement dit n est un entier plus grand que p mais qui est impair. Mais cela existe bien car il y a une infinité de nombres impairs. Par exemple, si p est déjà impair alors on peut prendre $n = p$, et si p est pair on peut prendre tout simplement $n = p + 1$ (impair et juste après p !)

3. Montrons séparément les deux implications.

   $\Longrightarrow$ Supposons A ouverte, et prenons p tel que si $n \geqslant p$ alors $n \in A$. La contraposée de cette dernière implication nous dit que si $n \notin A$ alors $n < p$. Autrement dit les éléments dans le complémentaire de A sont tous strictement inférieurs à p. Mais donc il y a un nombre fini de tels éléments (éventuellement, aucun). Formellement $\overline{A} \subset \{ 0, 1, \dots, p-1 \}$ est une partie de $\mathbb{N}$ majorée donc est finie.

   $\Longleftarrow$ Réciproquement, supposons que le complémentaire de A est fini. S'il est non-vide, il admet un maximum, notons le M. Alors par définition si $n > M$, n n'est pas dans le complémentaire de A, donc est dans A. Comme ici il y a une inégalité stricte, on peut poser $p = M + 1$, qui vérifie bien que si $n \geqslant p$ alors $n \in A$. Ceci démontre que A est ouverte. Si jamais le complémentaire est vide, c'est que $A = \mathbb{N}$, donc A est bien sûr ouverte, en prenant $p = 0$.

4. (a) Par définition $\mathrm{Dep}(A) = 0$ signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $n \in A$. Et donc cela signifie $A = \mathbb{N}$.

   (b) Ici si $n > 7$ alors $n \in A$, et donc comme on travaille avec des inégalités larges, c'est $n \geqslant 8$ qui implique $n \in A$. Ceci est exactement la question 1.

   Mais ce n'est pas fini, il faut démontrer que c'est bien le plus petit possible. Autrement dit que si on prend $p \in \mathbb{N}$ avec $p < 8$ alors $\exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p$ et $n \notin A$. Mais si on prend $p < 8$ alors on peut toujours choisir $n = 7$ qui vérifie $n \geqslant p$ mais $n \notin A$.

   Donc le départ est bien 8.

   (c) La partie doit contenir 3 et tous les entiers plus grands que 3. On voit qu'elle ne peut pas contenir 2, sinon son départ serait en fait 2 ou plus petit. Mais alors elle peut contenir ou non 0 ainsi que 1. On trouve donc 4 parties : $\{ 0, 1, 3, 4, 5, \dots \}$, $\{ 0, 3, 4, 5, 6, \dots \}$, $\{ 1, 3, 4, 5, 6, \dots \}$, $\{ 3, 4, 5, 6, 7, \dots \}$.

5. (a) Un peu perturbant car évident. Écrivons

$$E = \{ p \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant p,\ n \in A \}. \tag{25}$$

   Alors $p \in E \Longrightarrow p \in A$ car c'est une inégalité large, donc si $p \in E$ alors pour $n = p$ on obtient $p \in A$. Ceci montre donc que $E \subset A$. Et le minimum de E est par définition un élément de E. Donc est dans A.

   (b) Si $\mathrm{Dep}(A) = 0$ alors nous avons vu que $A = \mathbb{N}$. Dans ce cas $\mathrm{Dep}(A) - 1 = -1$ et $-1 \notin \mathbb{N}$.

   Sinon, avec le même ensemble E, alors $q = \mathrm{Dep}(A) - 1$ est strictement plus petit que le minimum de E, donc n'est pas dans E. Mais on raisonne par l'absurde : si on avait $q \in A$, alors $q + 1$ est le minimum de E donc vérifie $\forall n \geqslant q + 1,\ n \in A$ et ceci serait aussi vrai avec q à la place de $q + 1$. Donc $q + 1$ ne serait pas le minimum de E. C'est une contradiction. Ainsi, $q \notin A$.

   (c) Le raisonnement de la question 3 montre bien que si $A \neq \mathbb{N}$, alors le complémentaire de A est fini et non-vide et on peut prendre $p = \mathrm{Max}(\mathbb{N} \setminus A) + 1$ qui vérifie bien $\forall n \geqslant p,\ n \in A$. C'est donc (toujours avec le vocabulaire de cette question) que $p \in E$. Cela ne démontre pas que p est le minimum possible. Pour démontrer cela, prenons q tel que $q < p$ et on doit montrer que $q \notin E$. Mais encore une fois par l'absurde, si on avait $q \in E$, alors $\forall n \in q,\ n \in A$, en particulier on pourrait appliquer ceci avec $p - 1$ et on obtiendrait $p - 1 \in A$. Mais $p - 1 = \mathrm{Max}(\mathbb{N} \setminus A)$ donc $p - 1 \in \mathbb{N} \setminus A$ et ainsi $p - 1 \notin A$. Ceci est absurde, donc $q \notin E$, et c'est bien p le minimum de E.

6. *(petite erreur dans l'énoncé, c'est bien $A_1 \cap A_2$ dans la première question et $A_1 \cup A_2$ dans la seconde ; les deux résultats, et les deux égalités à démontrer, sont bien vrais)*

   (a) Supposons A_1 et A_2 ouvertes. Par définition, il existe des entiers **a priori différents**, donc il faut leur donner un nom différent, p_1 et p_2, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant p_1 \Longrightarrow n \in A_1) \text{ et } (n \geqslant p_2 \Longrightarrow n \in A_2) \tag{26}$$

   Comme suggéré dans la question, posons $p = \mathrm{Max}(p_1, p_2)$. Alors si $n \geqslant p$ cela signifie $n \geqslant p_1$ et $n \geqslant p_2$, et donc les hypothèses des implications ci-dessus sont toutes les deux vérifiées, d'où on conclut $n \in A_1$ et $n \in A_2$. Cela signifie précisément que $A_1 \cap A_2$ est encore ouverte, avec $p = \mathrm{Max}(p_1, p_2)$ qui vérifie la condition $(*)$.

   Pour conclure, il reste à vérifier que p est bien le plus petit possible, autrement dit : si on a $q \in \mathbb{N}$ avec $q < p$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > q$ et $n \notin A_1 \cap A_2$ (cette dernière condition signifiant $n \notin A_1$ ou $n \notin A_2$). Mais si $\mathrm{Max}(p_1, p_2) = p_1$ alors on a $q < p_1$ et donc on peut prendre $n = p_1 - 1$ qui vérifie bien $n \notin A_1$ (question 5.b). Et si $\mathrm{Max}(p_1, p_2) = p_2$ alors on a $q < p_2$ et donc on peut prendre $n = p_2 - 1$ tel que $n \notin A_2$.

(b) Le raisonnement est du même type. Supposons A_1 et A_2 ouvertes, prenons p_1 et p_2 comme ci-dessus, prenons $p = \mathrm{Min}(p_1, p_2)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la condition $n \geqslant p$ signifie en fait $n \geqslant p_1$ ou $n \geqslant p_2$. Dans le premier cas on conclut $n \in A_1$, dans le second cas on conclut $n \in A_2$. Cela démontre que $A_1 \cup A_2$ est ouverte, en prenant $p = \mathrm{Min}(p_1, p_2)$, et donc aussi que le départ de $A_1 \cup A_2$ est inférieur à p. Mais ici on ne peut pas facilement montrer que p est bien le plus petit possible.

(c) Il suffit de prendre par exemple $A_1 = \mathbb{N} \setminus \{2\} = \{0, 1, 3, 4, 5, \dots\}$, dont le départ est 3, et $A_3 = \mathbb{N} \setminus \{3\} = \{0, 1, 2, 4, 5, \dots\}$, dont le départ est 4. Alors $A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$ dont le départ est 0.

Exercice 2

Raisonnons par analyse-synthèse.
Analyse : supposons qu'on ait de tels $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Posant $n = 0$, on trouve
$$0 = u_0 = a \times 1 + 1 \tag{27}$$
d'où nécessairement $a = -1$.
Posant ensuite $n = 1$, remplaçant tout de suite par la valeur de a qu'on vient de déterminer, on trouve
$$1 = u_1 = -b + c \tag{28}$$
Il n'y a aucune chance de pouvoir déterminer b et c uniquement avec ces deux équations seulement, il en faut une troisième !
Pour cela on calcule avec $n = 2$: d'une part
$$u_2 = 5 \times 1 - 6 \times 0 = 5 \tag{29}$$
et d'autre part
$$u_2 = -b^2 + c^2 \tag{30}$$
On utilise alors l'une des équations pour remplacer dans l'autre. Par exemple, de (28) on tire $c = b + 1$, et si on remplace dans (30) on trouve
$$5 = -b^2 + (b+1)^2 \tag{31}$$
Ceci se développe de façon à donner simplement $5 = -b^2 + b^2 + 2b + 1$ d'où $2b = 4$ soit $b = 2$, puis donc $c = 3$.
Synthèse : posons $a = -1$, $b = 2$, $c = 3$. Démontrons à l'aide du principe de récurrence double
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{u_n = -2^n + 3^n}_{P(n)} \tag{32}$$
Initialisation pour $n = 0$: cela donne $0 = -1 + 1$, ce qui est bien vrai, ainsi $P(0)$ est vérifiée.
Initialisation pour $n = 1$: cela donne $1 = -2 + 3$, ce qui est bien vrai, ainsi $P(1)$ est vérifiée.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ toutes les deux vérifiées, montrons $P(n+2)$. Par définition de u_{n+2} on a
$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n && (33)\\
&= 5(-2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(-2^n - 3^n) && \text{(en utilisant } P(n+1) \text{ et } P(n)) \quad (34)\\
&= -5 \times 2^{n+1} + 5 \times 3^{n+1} + 6 \times 2^n - 6 \times 3^n && (35)\\
&= -5 \times 2 \times 2^n + 5 \times 3 \times 3^n + 6 \times 2^n - 6 \times 3^n && \text{(on voudra factoriser par } 2^n \text{ et par } 3^n) \quad (36)\\
&= -10 \times 2^n + 15 \times 3^n + 6 \times 2^n - 6 \times 3^n && (37)\\
&= (-10 + 6) \times 2^n + (15 - 6) \times 3^n && (38)\\
&= -4 \times 2^n + 9 \times \times 3^n && (39)\\
&= -2^2 \times 2^n + 3^2 \times \times 3^n && \text{(guidé par le but visé)} \quad (40)\\
&= -2^{n+2} + 3^{n+2} && (41)
\end{aligned}$$
et ceci démontre $P(n+2)$.
Conclusion : par le principe de récurrence double ceci démontre bien $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ceci conclut en même temps notre partie synthèse.

Problème 2

1. Pour $K = 0$ on trouve $\forall x \in I$, $\forall y \in I$, $|f(x) - f(y)| = 0$, ainsi $f(x) - f(y) = 0$ donc $f(x) = f(y)$. Mais ceci caractérise les fonctions constantes, réciproquement si f est constante alors avec les mêmes calculs f vérifie bien $(**)$ avec $K = 0$.
2. (a) Dans ce cas, et quelque soit l'intervalle I, alors pour tous $x \in I$, $y \in I$ on calcule
$$|f_1(x) - f_1(y)| = |(x+1) - (y+1)| = |x+1-y-1| = |x-y| \tag{42}$$
Autrement dit l'inégalité $|f_1(x) - f_1(y)| \leqslant |x-y|$ est vraie et il suffit de prendre $K = 1$ pour vérifier $(**)$.

   (b) Similairement, pour tous $x \in I$ et $y \in I$ on calcule
$$|f_2(x) - f_2(y)| = |3x - 3y| = |3(x-y)| = 3|x-y| \tag{43}$$
Ainsi l'inégalité $|f_2(x) - f_2(y)| \leqslant 3|x-y|$ est vraie et donc il suffit de prendre $K = 3$ pour vérifier $(**)$.

   (c) Généralisation des cas précédents. Supposons f affine. Par hypothèse il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. On calcule alors, pour tous $x, y \in I$
$$\begin{multline}|f(x) - f(y)| = |(ax+b) - (ay+b)| \\ = |ax + b - ay - b| = |ax - ay| \\ = |a(x-y)| = |a| \times |x-y| \end{multline} \tag{44}$$
Conclusion : on pose $K = |a|$ et on a alors bien $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$, pour tous $x, y \in I$.
3. (a) Là encore, une question qu'on peut faire très formellement.
$$\text{non}(**) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in I,\ \exists y \in I,\ |f(x) - f(y)| > K|x-y| \tag{45}$$

   (b) Soit $K > 0$.
Analyse : on cherche $x > 0$ tel que $\sqrt{x} > Kx$. Cette inégalité (qu'on peut retourner dans différents sens) est équivalente $\frac{\sqrt{x}}{x} > K$ c'est à dire $\frac{1}{\sqrt{x}} > K$, ou encore $\sqrt{x} < \frac{1}{K}$. Passant au carré des deux côtés (tout est positif) on trouve qu'il faut $x < \frac{1}{K^2}$.
Synthèse : prenons $x > 0$ tel que $x < \frac{1}{K^2}$. Alors par ces calculs (qui sont des équivalences) l'inégalité demandée est bien vérifiée.

   (c) L'idée est donc de fixer y à 0... Démontrons la négation de $(**)$: soit $K \in \mathbb{R}_+$. Si $K > 0$ alors comme ci-dessus on choisit x tel que $0 < x < \frac{1}{K^2}$, et aussi assez petit pour que $x \leqslant 1$ (cela est toujours possible). Alors pour ce x et pour $y = 0$ (tous les deux dans $[0,1]$) on obtient
$$|\alpha(x) - \alpha(y)| = \sqrt{x} > Kx = K|x-y| \tag{46}$$
et ceci est bien la négation de $(**)$.
Pour être rigoureux il faut aussi parler du cas $K = 0$, car ici nous avons supposé $K > 0$! On ne peut pas considérer $\frac{1}{K^2}$; mais il suffit encore une fois de prendre $y = 0$, et n'importe quelle valeur de $x \neq 0$ (par exemple $x = 1$) va vérifier $|\alpha(x) - \alpha(0)| > 0$, sinon c'est que la fonction racine serait constante...
4. (a) Identité remarquable. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alors $x^2 - y^2 = (x-y) \times (x+y)$. Et par la valeur absolue d'un produit, $|(x-y) \times (x+y)| = |x-y| \times |x+y|$. C'est tout.

   (b) Nous avons d'un côté $|\beta(x) - \beta(y)|$, de l'autre $|x-y|$. Il s'agit donc de majorer $|x+y|$. Ce n'est pas trop difficile sous les hypothèses données : $I = [0,c]$ avec $c \in \mathbb{R}_+$, donc si $x, y \in I$ alors $0 \leqslant x \leqslant c$ et $0 \leqslant y \leqslant c$. En additionnant les deux inégalités, on obtient $0 \leqslant x + y \leqslant c + c = 2c$. En valeur absolue on en déduit $|x+y| \leqslant 2c$. Ainsi l'inégalité précédente donne bien $|x^2 - y^2| \leqslant 2c \times |x-y|$.

   (c) Tout est là. Soit $c \in \mathbb{R}_+$. Posons $K = 2c$. Alors pour tous $x, y \in [0,c]$ on a $|\beta(x) - \beta(y)| \leqslant K \times |x-y|$. Cela démontre que β est lipschitzienne sur $[0,c]$.

(d) Là encore, montrons la négation de (∗∗). Soit $K \in \mathbb{R}_+$. Il s'agit de trouver x et y tous les deux dans $[0, +\infty[$ tels que $|x^2 - y^2| > K|x - y|$, et si on décide de prendre $y = 0$ il suffit de prendre x tel que $|x^2| > K|x|$.

Alors le raisonnement est du même type que précédemment. Si $K > 0$, il s'agit de montrer qu'il existe $x \in [0, +\infty[$ tel que $x^2 > Kx$ ce qui est équivalent (si on prend $x \neq 0$) à $x > K$. Si $K = 0$ n'importe quelle valeur de $x \neq 0$ convient.

5. Il faut prendre un peu d'initiative, s'inspirant des preuves précédentes.
Pour $x, y > 0$ calculons d'abord

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - x}{xy}\right| = \frac{|y - x|}{|xy|} = \frac{|x - y|}{xy} \tag{47}$$

(on utilise $|y - x| = |x - y|$ sans plus de commentaires, et $x, y > 0$ donc les valeurs absolues s'en vont en bas). Or pour $1 \leqslant x$ et $1 \leqslant y$ on a $1 \leqslant xy$ et donc $\frac{1}{xy} \leqslant 1$. Ainsi

$$\frac{|x - y|}{xy} \leqslant 1 \times |x - y| \tag{48}$$

Mais cette inégalité et le calcul d'avant montre bien que γ est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$, en prenant $K = 1$. Pour l'intervalle $]0, +\infty[$, même plan qu'avant sauf qu'on ne peut pas fixer y à 0 mais on va le prendre à 1. Exprimons cela. Soit $K \in \mathbb{R}_+$. Si $K = 0$ alors n'importe quel x avec $x \neq 1$ va bien vérifier $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| > 0$. Si $K > 0$, alors il suffit d'avoir $\frac{1}{xy} > K$ et $x \neq y$ pour pouvoir multiplier des deux côtés par $|x - y|$ et écrire $\frac{|x-y|}{xy} > K|x - y|$. On veut donc $\frac{1}{x} > K$ soit $x < \frac{1}{K}$. En conclusion, étant donné $K > 0$, on prend $y = 1$ et x tel que $0 < x < 1$ et $x < \frac{1}{K}$ et les calculs précédents montrent que $|\gamma(x) - \gamma(y)| > K|x - y|$. Tout ceci démontre que γ n'est pas lipschitzienne sur $]0, +\infty[$.

6. Dans cette question, on suppose que I est l'intervalle $[0, +\infty[$.

(a) Il s'agit d'une version de l'inégalité triangulaire. Soit f une fonction quelconque sur I. Soit $x \in I = [0, +\infty[$. On écrit

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |(f(x) - f(0)) + f(0)| && (49) \\ &\leqslant |f(x) - f(0)| + |f(0)| && \text{(inégalité triangulaire)} \quad (50) \end{aligned}$$

et c'est l'inégalité demandée.

(b) Tout y est. Supposons f lipschitzienne sur I. Prenons $K \in \mathbb{R}_+$ tel que la condition (∗∗) soit vérifiée. Alors en particulier pour $x \in [0, +\infty[$ et $y = 0$ alors $|f(x) - f(0)| \leqslant K|x|$ qui est aussi égal à x car $x \geqslant 0$. Ainsi il suffit de poser $A = K$ et $B = |f(0)|$ et on a bien l'inégalité demandée.

(c) Démontrons cela par l'absurde. Supposons que la fonction δ soit lipschitzienne sur $[0, +\infty[$. Il existe alors des constantes $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ comme ci-dessus telles que $\forall x \in [0, +\infty[$, $x^3 \leqslant Ax + B$ (bien sûr sur cet intervalle, $x^3 \geqslant 0$, et les constantes A, B sont automatiquement positives). Mais il y a de multiples façons de voir que cela est absurde. Par exemple, on aurait alors en divisant

$$\forall x > 0, \quad x^2 \leqslant A + \frac{B}{x} \tag{51}$$

mais le terme de gauche tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$ alors que à droite $\lim_{x\to+\infty} \frac{B}{x} = 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} A + \frac{B}{x} = A$. Cela est tout à fait absurde.

En conclusion la fonction δ ne peut pas être lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

Remarque : on voit que dans cet argument il est essentiel que I soit infini à droite, en effet on peut démontrer que δ est bien lipschitzienne sur un intervalle $[0, c]$ pour tout $c \in \mathbb{R}_+$! Et le même raisonnement est valable pour d'autres fonctions f définies sur $[0, +\infty[$ telles que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, par exemple tous les $x \mapsto x^n$ $(n \geqslant 2)$ ou $x \mapsto e^x$.

7. Il s'agit d'abord de l'inégalité triangulaire. Supposons que f et g soient toutes les deux lipschitziennes sur I. Alors il existe des constantes **a priori différentes** donc il faut leur donner un nom différent $K \in \mathbb{R}_+$, $L \in \mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \in I,\ \forall y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y| \tag{52}$$
$$|g(x) - g(y)| \leqslant L|x - y| \tag{53}$$

et on trouve alors, pour tous $x \in I$ et $y \in I$:

$$|(f(x) - g(x)) + (f(y) - g(y))| \tag{54}$$
$$= |f(x) - g(x) + f(y) - g(y)| \tag{55}$$
$$= |(f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))| \tag{56}$$
$$\leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \tag{57}$$
$$\leqslant K|x - y| + L|x - y| \tag{58}$$

et on veut que tout ceci soit $\leqslant M|x - y|$ pour un certain $M \in \mathbb{R}_+$ à déterminer. Mais c'est en posant $M' = \mathrm{Max}(K, L)$, qui est plus grand que les deux, qu'on peut alors écrire

$$K|x - y| \leqslant M'|x - y| \quad \text{et} \quad L|x - y| \leqslant M'|x - y| \tag{59}$$

et ainsi poursuivre les calculs ci-dessus :

$$|(f(x) - g(x)) + (f(y) - g(y))| \tag{60}$$
$$\leqslant K|x - y| + L|x - y| \tag{61}$$
$$\leqslant M'|x - y| + M'|x - y| \tag{62}$$
$$\leqslant 2M'|x - y| \tag{63}$$

Ceci montre que $f + g$ vérifie la condition $(**)$ en prenant comme constante $M = 2M'$.

8. La réponse est non. D'abord les calculs ci-dessus ne s'appliquent pas du tout. Et un contre-exemple est obtenu en prenant l'intervalle $I = [0, +\infty[$ et les fonctions f et g toutes les deux égales à $x \mapsto x$: elles sont toutes les deux lipschitziennes (car affine, ou en le vérifiant directement comme dans la question 2), mais on a montré à la question 4.d que leur produit, qui est $x \mapsto x^2$, ne l'est pas.