DS 1 Mathématiques

Durée : 3 heures. Calculatrices et documents non autorisés.
Les exercices et les problèmes peuvent être traités indépendamment et dans l'ordre au choix. Cependant, dans les problèmes, il y a une certaine progression logique et parfois une dépendance entre les questions et, même s'il est possible de sauter une question, il est bon de prendre son temps pour lire les énoncés et de comprendre la structure globale du problème.
*Le but n'est pas d'absolument terminer tout, mais de **bien** faire.*

Exercice 1. Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_1) \quad x = 2\sqrt{3-x} \qquad\qquad (E_2) \quad \frac{2x^2+2x-7}{x-4} \leqslant 1$$

$$(E_3) \quad |2x^2-5x-3| \leqslant x^2+3 \qquad\qquad (E_4) \quad \lfloor \sqrt{x^2+1} \rfloor = 2$$

Exercice 2. Montrer par récurrence sur l'entier $n \geqslant 0$ que

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} \tag{1}$$

Premier problème

On fixe un ensemble E. Pour un nombre infini A_0, A_1, ... de parties de E, qu'on note $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on **définit** leur *union infinie* par la condition

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in E \mid \exists n \in \mathbb{N},\, x \in A_n\} \subset E \tag{2}$$

et on définit de même leur *intersection infinie* par

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\, x \in A_n\} \subset E \tag{3}$$

1. (a) On suppose que $A_n = E$ pour tout $n \geqslant 2$. Montrer à partir de cette définition que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0 \cap A_1 \tag{4}$$

   (b) On suppose que $A_n = \emptyset$ pour tout $n \geqslant 2$. De même, montrer que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0 \cup A_1 \tag{5}$$

2. On suppose $E = \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1[= [0, +\infty[\tag{6}$$

   On pourra utiliser la fonction partie entière pour l'inclusion $\supset$.

3. Démontrer les *lois de Morgan infinies* (le complémentaire signifie complémentaire dans E) :

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \tag{7}$$

4. On suppose dans cette question $E = \mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\tfrac{1}{n+1}, 1\right] =]0, 1] \tag{8}$$

   (b) On suppose qu'on a des parties $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions suivantes : pour tout $n \geqslant 0$,

$$(C_1) \quad A_n \subset [0, +\infty[\qquad\qquad (C_2) \quad A_n \subset A_{n+1} \qquad\qquad (C_3) \quad A_n \text{ admet un minimum } m_n$$

      i. Montrer que l'union infinie des $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.
      ii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m_{n+1} \leqslant m_n$.
      iii. Peut-on conclure que l'union infinie des $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un minimum ? Une borne inf ?

Second problème

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et tout réel $a \in A$, on dit que a est **un point isolé** de A si la propriété suivante est vérifiée :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\, = \{a\}. \tag{$*$}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n est un point isolé de $\mathbb{N}$.
2. Existe-t-il un point de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas isolé ? Justifier.
3. (a) Écrire la négation de la propriété $(*)$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que x n'est pas un point isolé de $\mathbb{R}$.
4. (a) Dans cette question, on fixe un nombre rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, un nombre réel $\varepsilon > 0$, et un entier $n \in \mathbb{N}$ supérieur à $2/\varepsilon$. Montrer que :

   $$\text{si on pose } r = \frac{np+q}{nq} \in \mathbb{Q} \quad \text{alors} \quad 0 < \left| r - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon. \tag{9}$$

   (b) En déduire qu'aucun point de $\mathbb{Q}$ n'est isolé.
5. (a) Soit $B = [1,2] \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point isolé de B.
   (b) Soit $C = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point non isolé de C.
6. Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. Démontrer que a est un point isolé de A si et seulement si la propriété suivante est vérifiée :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon] = \{a\}. \tag{$**$}$$