DS 1 Mathématiques

Les exercices et problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre voulu. Dans l'exercice 1, les questions 1, 2, 3 sont aussi indépendantes. Dans les problèmes par contre, même s'il est toujours possible de sauter une question, il est nécessaire de prêter attention à la progression logique et à la dépendance entre questions. Il est conseillé de prendre son temps pour comprendre la structure globale du problème. Le but n'est pas de tout faire ***mais de le faire bien****.*

Exercice 1

1. (a) Soient P, Q, R trois assertions, démontrer l'équivalence suivante :

$$P \text{ et non}(Q \text{ et } R) \quad \equiv \quad (P \text{ et non}(Q)) \text{ ou } (P \text{ et non}(R)) \tag{1}$$

   (b) En déduire que pour trois ensembles A, B, C quelconques : $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

2. Montrer que les ensembles suivants sont égaux :

$$E = \left\{ (3a-1, 2-5a) \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 5x + 3y = 1 \right\} \tag{2}$$

3. Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n+1) = (n+1)(2n+1) \tag{3}$$

Problème 1

Une partie $A \subset \mathbb{N}$ est dite *ouverte* si elle vérifie la propriété suivante :

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant p \Longrightarrow n \in A \tag{$*$}$$

1. Montrer que $A = \mathbb{N} \setminus \{ 7 \}$ est une partie ouverte.
2. (a) Écrire la négation de ($*$).
   (b) Montrer que l'ensemble des nombres pairs, $P = \{ 2k \mid k \in \mathbb{N} \}$, n'est pas une partie ouverte.
3. Montrer qu'une partie $A \subset \mathbb{N}$ est ouverte si et seulement si son complémentaire $\mathbb{N} \setminus A$ contient un nombre fini d'éléments (ou est vide).

Si A est une partie ouverte, on définit le *départ* de A comme l'élément

$$\mathrm{Dep}(A) = \mathrm{Min} \left\{ p \in \mathbb{N} \,\middle|\, \forall n \geqslant p,\ n \in A \right\} \tag{4}$$

4. (a) Que signifie $\mathrm{Dep}(A) = 0$?
   (b) Quel est le départ de $\mathbb{N} \setminus \{ 7 \}$?
   (c) Donner toutes les parties de $\mathbb{N}$ dont le départ est égal à 3. On pourra les lister sans justification en les écrivant avec des trois petits points mais en écrivant au moins les cinq premiers éléments (par exemple on écrit $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$).
5. Soit A une partie ouverte de $\mathbb{N}$.
   (a) Justifier que $\mathrm{Dep}(A) \in A$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Dep}(A) - 1 \notin A$ (on pourra distinguer le cas où $\mathrm{Dep}(A) = 0$).
   (c) En déduire que si $A \neq \mathbb{N}$ alors $\mathrm{Dep}(A) = \mathrm{Max}(\mathbb{N} \setminus A) + 1$.
6. Soient A_1 et A_2 deux parties ouvertes de $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $A_1 \cap A_2$ est encore ouverte, avec $\mathrm{Dep}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{Max}(\mathrm{Dep}(A_1), \mathrm{Dep}(A_2))$.
   (b) Montrer que $A_1 \cup A_2$ est encore ouverte, avec $\mathrm{Dep}(A_1 \cup A_2) \leqslant \mathrm{Min}(\mathrm{Dep}(A_1), \mathrm{Dep}(A_2))$.
   (c) Pouvez-vous donner des exemples de parties ouvertes $A_1, A_2 \subset \mathbb{N}$ pour lesquelles l'inégalité ci-dessus est stricte ? On pourra les écrire comme à la question 4.c.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \tag{5}$$

Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a \times b^n + c^n$.

Problème 2

Pour un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction réelle f définie sur I, on dit que f est *lipschitzienne* sur I si elle vérifie la propriété suivante :

$$\exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in I, \forall y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y| \tag{$**$}$$

(on rappelle que $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs)

1. Quelles sont les fonctions vérifiant la propriété ci-dessus avec $K = 0$?
2. (a) Montrer que la fonction $f_1 : x \mapsto x + 1$ est lipschitzienne.
   (b) Montrer que $f_2 : x \mapsto 3x$ est lipschitzienne.
   (c) On rappelle qu'une fonction f est affine si et seulement si $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Montrer que toute fonction affine est lipschitzienne.
3. (a) Écrire la négation de la condition ($**$).
   (b) Montrer que quelque soit $K > 0$, il existe $x > 0$ tel que $\sqrt{x} > Kx$.
   (c) En déduire que la fonction $\alpha : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$.
4. Dans cette question, on considère la fonction $\beta : x \mapsto x^2$.
   (a) Montrer que $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x^2 - y^2| = |x - y| \times |x + y|$
   (b) Si I est un intervalle $[0, c]$, où $c \in \mathbb{R}_+$, montrer que $\forall x \in I$, $\forall y \in I$, $|\beta(x) - \beta(y)| \leqslant 2c \times |x - y|$.
   (c) En déduire que pour tout $c \geqslant 0$ la fonction β est lipschitzienne sur $[0, c]$.
   (d) Montrer que β n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.
5. Avec des idées similaires, montrer que la fonction $\gamma : x \mapsto 1/x$ est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$, mais n'est pas lipschitzienne sur $]0, +\infty[$.
6. Dans cette question, on suppose que I est l'intervalle $[0, +\infty[$.
   (a) Montrer que pour toute fonction f sur I : $\forall x \in I$, $|f(x)| \leqslant |f(x) - f(0)| + |f(0)|$
   (b) En déduire que si f est lipschitzienne sur I alors il existe des constantes $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ telles que $\forall x \in I$, $|f(x)| \leqslant Ax + B$.
   (c) En déduire que la fonction $\delta : x \mapsto x^3$ n'est pas lipschitzienne sur I.
7. Montrer que si f et g sont toutes les deux des fonctions lipschitziennes sur I, alors la fonction $f + g$ est encore lipschitzienne sur I.
8. Si f et g sont lipschitziennes, alors $f \times g$ est-elle lipschitzienne ?