DS 2 Mathématiques
Correction

Exercice 1

1. L'équation (E_1) est équivalente (par définition même de la partie entière) à

$$(E_1) \iff 5 \leqslant 3x^2 + 4x + 1 < 6 \tag{1}$$

Nous allons donner toutes les solutions séparément des deux inégalités :

- D'une part $5 \leqslant 3x^2 + 4x + 1 \iff 0 \leqslant 3x^2 + 4x - 4$. On est ramené au signe d'un polynôme du second degré. Posons $\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 16 + 48 = 64 = 8^2$, dont on trouve deux solutions $x = \frac{-4 \pm 8}{2 \times 3}$ soit $x_1 = -\frac{12}{6} = -2$ et $x_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Le signe est donné par

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$-\infty$
$3x^2 + 4x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(2)

En résumé $\boxed{5 \leqslant 3x^2 + 4x + 1 \iff x \in \left]-\infty, -2\right] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[}$.

- D'autre part $3x^2 + 4x + 1 < 6 \iff 3x^2 + 4x - 5 < 0$. Là encore on calcule $\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 16 + 60 = 76$ et on trouve deux solutions $x = \frac{-4 \pm \sqrt{76}}{2 \times 3}$ (or $76 = 4 \times 19$) soit $x_3 = \frac{-2 - \sqrt{19}}{3}$ et $x_4 = \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}$. Le signe est donné par

x	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt{19}}{3}$		$\frac{-2+\sqrt{19}}{3}$		$-\infty$
$3x^2 + 4x - 5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

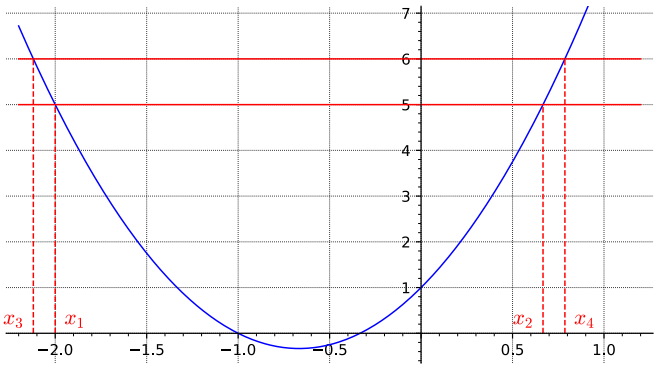
(3)

En résumé $\boxed{3x^2 + 4x + 1 < 6 \iff x \in \left]\frac{-2-\sqrt{19}}{3}, \frac{-2+\sqrt{19}}{3}\right[}$.

Il s'agit maintenant d'intersecter ces deux domaines, car nous cherchons à ce que les *deux* équations soient satisfaites simultanément. Pour cela nous avons besoin de savoir où se situent les $\frac{-2 \pm \sqrt{19}}{3}$ par rapport à -2 et à $\frac{2}{3}$. Mais c'est en fait clair, par construction même de nos équations : d'une part $76 > 64$, et donc $x_4 = \frac{-4+\sqrt{76}}{6} > \frac{-4+\sqrt{64}}{6} = x_2$. Et de même $x_3 = \frac{-4-\sqrt{76}}{6} < \frac{-4-\sqrt{64}}{6} = x_1$. En résumé, on trouve comme ensemble de solutions

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{-2-\sqrt{19}}{3}, -2\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{-2+\sqrt{19}}{3}\right[} \tag{4}$$

Cela correspond aussi bien à l'intuition géométrique que l'on peut avoir, au moins de trouver une telle union de deux intervalles.



2. • (E_2) Il s'agit de faire passer « comme d'habitude » le $4z$ à gauche pour tout réunir d'un côté. Il n'y a plus qu'à diviser et donner le résultat sous forme algébrique.

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff (1+2i)z - 4z = i && (5)\\ &\iff (-3+2i)z = i && (6)\\ &\iff z = \frac{i}{-3+2i} && (7)\\ &\iff z = \frac{i(-3-2i)}{(-3)^2+2^2} && (8)\\ &\iff z = \frac{-3i+2}{13} && (9)\end{aligned}$$

D'où l'unique solution sous forme algébrique $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{13} - i\frac{3}{13}\right\}}$.

• (E_3) En développant, ou bien en reconnaissent une identité remarquable, on a directement

$$\begin{aligned}(E_3) &\iff (2i)^2 - z^2 = 9 && (10)\\ &\iff -4 - z^2 = 9 && (11)\\ &\iff z^2 = -13 && (12)\end{aligned}$$

d'où l'ensemble de solutions (directement d'après le cours) $\boxed{\mathcal{S} = \left\{i\sqrt{13}, -i\sqrt{13}\right\}}$.

Exercice 2

1. L'inéquation (I) est équivalente à

$$(I) \iff -\sqrt{3} \leqslant \tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leqslant \sqrt{3} \tag{13}$$

et on rappelle que $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$. Attention car il y a un domaine de définition : (I) n'est pas définie si et seulement si $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ c'est-à-dire $\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi$, donc $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

Pour donner toutes les solutions avec $\theta \in [0, 2\pi]$ il faut donner toutes les solutions de $-\sqrt{3} \leqslant \tan(\alpha) \leqslant \sqrt{3}$ avec $\alpha \in [\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}[$: ainsi on pose $\alpha = \theta + \frac{\pi}{6}$, et quand à l'envers on posera $\theta = \alpha - \frac{\pi}{6}$ alors on aura bien $\theta \in [0, 2\pi]$.

Or d'après le cercle trigonométrique, en comptant soigneusement les angles depuis $\frac{\pi}{6}$ et qui revient sur lui-même à $\frac{13\pi}{6}$, on trouve

$$-\sqrt{3} \leqslant \tan(\alpha) \leqslant \sqrt{3} \iff \alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}\right] \tag{14}$$

(fort heureusement, ceci ne passe pas par les valeurs interdites de (I) : le domaine de définition ne pose pas de piège supplémentaire) d'où pour $\theta \in [0, 2\pi]$, retranchant $\frac{\pi}{6}$ partout :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]} \tag{15}$$

2. (a) On rédige proprement une analyse-synthèse.

• Analyse : on cherche $r \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $\forall \theta \in \mathbb{R}, 4\cos(\theta) + 2\sqrt{5}\sin(\theta) = r\cos(\theta + \varphi)$. Or pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}r\cos(\theta+\varphi) &= r\Big(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)\Big) && (16)\\ &= (r\cos(\varphi))\cos(\theta) + (-r\sin(\varphi))\sin(\theta) && (17)\end{aligned}$$

L'égalité avec $4\cos(\theta) + 2\sqrt{5}\sin(\theta)$ est vérifiée si on choisit r et φ tels que

$$\begin{cases} r\cos(\varphi) = 4 \\ -r\sin(\varphi) = 2\sqrt{5} \end{cases} \tag{18}$$

On déduit alors de ces conditions $r^2\cos^2(\varphi) = 16$ et $r^2\sin^2(\varphi) = 4 \times 5 = 20$, d'où

$$r^2(\underbrace{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}_{1}) = 16 + 20 = 36 \tag{19}$$

On pose donc $r = 6$. Puis cela revient à chercher $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{4}{6} \\ \sin(\varphi) = -\frac{2\sqrt{5}}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{2}{3} & (L_1) \\ \sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{5}}{3} & (L_2) \end{cases} \tag{20}$$

Il ne s'agit pas de valeurs remarquables, on doit donc utiliser les fonctions trigonométriques réciproques. Avec (L_1) on doit choisir entre $+\arccos(\frac{2}{3}) \in [0, \pi]$ (où le sinus est positif) ou $-\arccos(\frac{2}{3}) \in [-\pi, 0]$ (où le sinus est négatif), mais ici avec (L_2) le sinus est négatif, et donc on prend $\theta = -\arccos(\frac{2}{3})$.

- Synthèse : $\boxed{\text{on pose } r = 6 \text{ et } \theta = -\arccos(\frac{2}{3})}$, on a alors

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad 4\cos(\theta) + 2\sqrt{5}\sin(\theta) = r\cos(\theta + \varphi) = 6\cos\Big(\theta - \arccos(\tfrac{2}{3})\Big)} \tag{21}$$

(b) Remplaçant l'expression par sa simplification, on a alors

$$A = \Big\{6\cos\Big(\theta - \arccos(\tfrac{2}{3})\Big) \;\Big|\; \theta \in \mathbb{R}\Big\} \tag{22}$$

Mais sachant que le maximum de cos est 1 on en déduit que A est majoré par 6 et que c'est en fait un maximum :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad 6\cos\Big(\theta - \arccos(\tfrac{2}{3})\Big) \leqslant 6 \tag{23}$$

et si $\theta = +\arccos(\frac{2}{3})$ alors $6\cos\Big(\theta - \arccos(\frac{2}{3})\Big) = 6$.
De même, sachant que le minimum de cos est -1 on en déduit

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad 6\cos\Big(\theta - \arccos(\tfrac{2}{3})\Big) \geqslant -6 \tag{24}$$

et si $\theta = \pi + \arccos(\frac{2}{3})$ alors $6\cos\Big(\theta - \arccos(\frac{2}{3})\Big) = 6\cos(\pi) = -6$.

En résumé $\boxed{\mathrm{Max}(A) = 6 \text{ et } \mathrm{Min}(A) = -6}$.

(c) L'équation (E) est donc équivalente à

$$(E) \iff 6\cos\Big(\theta - \arccos(\tfrac{2}{3})\Big) = -3 \tag{25}$$

$$\iff \cos\Big(\theta - \arccos(\tfrac{2}{3})\Big) = -\frac{1}{2} \tag{26}$$

Mais sous cette forme, il est facile de donner toutes les solutions, cette fois on tombe sur une valeur remarquable du cercle trigonométrique !

$$(E) \iff \exists k \in \mathbb{Z}\ \Big(\theta - \arccos(\tfrac{2}{3}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \theta - \arccos(\tfrac{2}{3}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\Big) \tag{27}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z}\ \Big(\theta = \arccos(\tfrac{2}{3}) + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \theta = \arccos(\tfrac{2}{3}) - \frac{2\pi}{3} - 2k\pi\Big) \tag{28}$$

Ce qu'on peut aussi écrire

$$\boxed{\mathcal{S} = \Big\{\arccos(\tfrac{2}{3}) + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\Big|\; k \in \mathbb{Z}\Big\} \cup \Big\{\arccos(\tfrac{2}{3}) - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\Big|\; k \in \mathbb{Z}\Big\}} \tag{29}$$

3. (a) Raisonnons proprement. Soit $x \in \mathbb{R}$ et on suppose x solution de (F). On applique alors la fonction tangente des deux côtés de l'égalité (en rappelant $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(a)}{1-\tan(a)\tan(b)}$) : les arctangentes sont par définition bien dans le domaine de définition de tan, et leur somme aussi puisque c'est $\frac{\pi}{4}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
&\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4} && (30)\\
\Longrightarrow\ &\tan\Big(\arctan(2x) + \arctan(3x)\Big) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) && (31)\\
\Longrightarrow\ &\frac{\tan(\arctan(2x)) + \tan(\arctan(3x))}{1 - \tan(\arctan(2x)) \times \tan(\arctan(3x))} = 1 && (32)\\
\Longrightarrow\ &\frac{2x+3x}{1-2x\times 3x} = 1 && (33)\\
\Longrightarrow\ &\frac{5x}{1-6x^2} = 1 && (34)\\
\Longrightarrow\ &\boxed{5x = 1-6x^2} && (35)
\end{aligned}$$

(b) On se retrouve avec l'équation du second degré $6x^2 + 5x - 1 = 0$. On trouve alors facilement $\Delta = 5^2 - 4\times 6\times(-1) = 25 + 24 = 49 = 7^2$ et les deux solutions $x = \frac{-5\pm 7}{2\times 6}$ soit $\boxed{x=-1}$ et $\boxed{x = \frac{1}{6}}$.

Nous n'avons pas raisonné par équivalences, nous n'avons donc pas la garantie que les valeurs trouvées sont effectivement solutions de (F) ! C'est par contre le cas si le terme $\arctan(2x)+\arctan(3x)$ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: dans cet intervalle, il est vrai que deux angles sont égaux si et seulement si leurs tangentes sont égales. Il faut donc vérifier après coup si nos deux valeurs de x sont solutions ou non de l'équation.

- $x = -1$: alors $\arctan(2x)+\arctan(3x) = \arctan(-2)+\arctan(-3)$. Or $-2 < -1$ donc $\arctan(-2) < -\frac{\pi}{4}$ (la fonction arctan est strictement croissante, tout comme tan, et $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ car $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$) et de même $-3 < -1$ donc $\arctan(-3) < -\frac{\pi}{4}$, ainsi

$$\arctan(-2) + \arctan(-3) < -\frac{\pi}{2} \tag{36}$$

  et donc ceci ne peut pas être égal à $\frac{\pi}{4}$.
- $x = \frac{1}{6}$: alors $\arctan(2x)+\arctan(3x) = \arctan(\frac{1}{3})+\arctan(\frac{1}{2})$. Mais $0 < \frac{1}{3} < 1$ donc $0 < \arctan(\frac{1}{3}) < \frac{\pi}{4}$, et de même $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $0 < \arctan(\frac{1}{2}) < \frac{\pi}{4}$. En résumé

$$0 < \arctan(\tfrac{1}{3}) + \arctan(\tfrac{1}{2}) < \frac{\pi}{2} \tag{37}$$

  et ceci est bien solution de (F).

Conclusion : il y a une unique solution de (F), $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{6}\right\}}$.

Remarque 1. Quel est le sens profond de ceci ? D'une part, la formule $\arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}$ est celle qui a été vue en TD. D'autre part, le nombre $\arctan(-2)+\arctan(-3)$ a la même tangente que $\frac{\pi}{4}$ mais est en fait dans $]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[$ (utilisant que les deux arctangentes sont dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) et est donc égal à $\frac{\pi}{4} - \pi$ soit $-\frac{3\pi}{4}$. Ce qu'on peut d'ailleurs voir avec la formule $\arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(x)$, vraie (voir TD) pour tout $x < 0$, qui donne ici $\arctan(-2)+\arctan(-3) = \Big(-\frac{\pi}{2} - \arctan(-\frac{1}{2})\Big) + \Big(-\frac{\pi}{2} - \arctan(-\frac{1}{3})\Big)$. Sachant en plus $\arctan(-x) = -\arctan(x)$, on retombe bien sur $-\frac{3\pi}{4}$.

Exercice d'informatique

1. Il faut considérer que c'est une question de cours…

```python
def valeur_absolue(x):
    if x >= 0:
        return x
    else:
        return -x
```

2. (a)
   - `miam(0) renvoie 0` : on entre une fois dans la boucle, à la fin $n = 1$ et $s = 1{,}40$, et on renvoie 0.
   - `miam(1.4) renvoie 1` : on entre une fois dans le boucle, à la fin $n = 1$ et $s = 1{,}40$, ce qui permet de faire un deuxième passage, à la fin $n = 2$ et $s = 2{,}80$, on renvoie 1.
   - `miam(2) renvoie 1` : idem, on peut faire un deuxième passage mais ensuite c'est fini.
   - `miam(3) renvoie 2` : après un premier passage $n = 1$ et $s = 1{,}40$, après un deuxième $n = 2$ et $s = 2{,}80$, ce qui permet de faire un troisième passage, à la fin $n = 3$ et $s = 4{,}20$, on s'arrête là et on renvoie 2.

   (b) `miam(x)` renvoie le nombre maximum de pains au chocolat qu'on peut acheter avec x euros.

FIGURE 1 – *Miam miam !*

La variable `n` représente le nombre de pains au chocolat et `s` le prix payé jusque là ; la boucle continue tant que le prix payé est inférieur à x. À la fin quand on ne peut plus payer, on a avancé `n` d'un cran trop loin (`n` est le *plus petit* nombre de pains qu'on *ne peut pas* payer) donc on renvoie `n - 1`.
C'est aussi le *plus grand entier* n tel que $1{,}40n \leqslant x$, et donc c'est aussi la partie entière de $\frac{x}{1{,}40}$.

3. Il s'agit de tester des « conditions en cascade » et il y a un certain ordre logique pour cela. Attention à bien respecter les messages, si en TP on peut s'en amuser, il s'agit ici de répondre très exactement à la question posée.

```python
def prix_pain_chocolat(p):
    # on suppose déjà que p est positif
    if p < 0.80:
        print("bas de gamme")
    elif p < 1.05:
        print("passable")
    elif p < 1.55:
        print("standard")
    else:
        print("luxueux")
```

4. Attention car, par les hypothèses faites, les fonctions s'appellent `m.sqrt(x)` et `m.exp(x)`. Nous reverrons largement la méthode de calcul de termes de suites dans le chapitre dédié.

```python
def suite(n):
    # u représente u_(i) en début de boucle
    u = 1
    for i in range(n):
        u = m.sqrt(3 + m.exp(-u))
    return u
```

Remarque 2. Remarques générales sur l'informatique à l'écrit :

- Les fonctions ont en général des arguments, elles ne font pas `input`.

- Les fonctions qui « calculent quelque chose » renvoient leur résultat avec `return` au lieu de faire `print`. C'est cela qui permet de ré-utiliser le résultat du calcul dans une autre fonction.
- L'indentation (le fait de décaler sur la droite un bloc d'instructions) a une signification bien précise en Python. Celle-ci doit donc **apparaitre clairement sur la copie** et **ne pas être ambigüe**. Sur sa copie, prendre de la place pour écrire les programmes.
- Les réponses doivent être justifiées, comme en mathématiques.

Problème 1

1. Par définition même de la racine cubique, $u^3 = 10 + 6\sqrt{3}$ et $v^3 = 10 - 6\sqrt{3}$. On a alors

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= \left(10 + 6\sqrt{3}\right) + \left(10 - 6\sqrt{3}\right) && (38)\\ &= \boxed{20} && (39) \end{aligned}$$

Quand à $u \times v$, on utilise la propriété des racines cubiques $\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ (vrai $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, quelque soit leur signe) et on reconnait sous la racines cubique deux quantités conjuguées de racines carrées :

$$\begin{aligned} u \times v &= \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} && (40)\\ &= \sqrt[3]{(10 + 6\sqrt{3})(10 - 6\sqrt{3})} && (41)\\ &= \sqrt[3]{10^2 - (6\sqrt{3})^2} && (42)\\ &= \sqrt[3]{100 - 36 \times 3} && (43)\\ &= \sqrt[3]{100 - 108} && (44)\\ &= \sqrt[3]{-8} && (45)\\ &= \boxed{-2} && (46) \end{aligned}$$

en effet c'est $(-2)^3 = -8$.

2. Sachant $A = u + v$, on rappelle alors (ou on retrouve rapidement sur son brouillon) l'identité

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \qquad (47)$$

Ici cela donne

$$\begin{aligned} A^3 &= (u + v)^3 && (48)\\ &= \left(10 + 6\sqrt{3}\right) + 3\left(\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}\right)^2 \times \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} + 3\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \times \left(\sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}\right)^2 + \left(10 - 6\sqrt{3}\right) && (49)\\ &= \left(10 + 6\sqrt{3}\right) + 3\sqrt[3]{(10 + 6\sqrt{3})^2} \times \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} + 3\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{(10 - 6\sqrt{3})^2} + \left(10 - 6\sqrt{3}\right) && (50)\\ &= 20 + 3\left(\sqrt[3]{(10 + 6\sqrt{3})^2 \times (10 - 6\sqrt{3})} + \sqrt[3]{(10 + 6\sqrt{3}) \times (10 - 6\sqrt{3})^2}\right) && (51) \end{aligned}$$

Il reste à faire apparaitre $-6A$ à partir du terme de droite. L'idée est encore de faire apparaitre des formes conjuguées avec des racines carrées :

$$\begin{aligned} (10 + 6\sqrt{3})^2(10 - 6\sqrt{3}) &= (10 + 6\sqrt{3}) \times \left((10 + 6\sqrt{3})(10 - 6\sqrt{3})\right) && (52)\\ &= (10 + 6\sqrt{3}) \times (-8) && (53) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} (10 + 6\sqrt{3})(10 - 6\sqrt{3})^2 &= \left((10 + 6\sqrt{3})(10 - 6\sqrt{3})\right) \times (10 - 6\sqrt{3}) \times && (54)\\ &= -8 \times (10 - 6\sqrt{3}) && (55) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} A^3 &= 20 + 3\left(\sqrt[3]{-8(10+6\sqrt{3})} + \sqrt[3]{-8(10-6\sqrt{3})}\right) && (56)\\ &= 20 + 3\left(-2\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} - 2\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}\right) && (57)\\ &= 20 - 6\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}\right) && (58)\\ &= \boxed{20-6A} && (59) \end{aligned}$$

3. On trouve $\boxed{\alpha = 2}$ qui vérifie $P(\alpha) = 0$.
4. On raisonne proprement par analyse-synthèse.
   - Analyse : on cherche $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^3 + 6x - 20 = (x-2)(x^2 + \beta x + \gamma)$. Mais pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (x-2)(x^2+\beta x+\gamma) &= x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 2x^2 - 2\beta x - 2\gamma && (60)\\ &= x^3 + (\beta-2)x^2 + (\gamma - 2\beta)x - 2\gamma && (61) \end{aligned}$$

     et ceci est égal à $x^3 + 6x - 20$ si on choisit (β, γ) tels que

$$\begin{cases} \beta - 2 = 0 \\ \gamma - 2\beta = 6 \\ -2\gamma = 20 \end{cases} \tag{62}$$

     et de ce système on tire rapidement $\beta = 2$ et $\gamma = 10$ (ceci vérifie bien les trois équations en même temps).
   - Synthèse : $\boxed{\text{on pose } \beta = 2 \text{ et } \gamma = 10}$, et alors par les calculs précédents on a bien

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 + 6x - 20 = (x-2)(x^2+2x+10)} \tag{63}$$

5. On a alors

$$P(x) = 0 \iff x - 2 = 0 \text{ ou } x^2 + 2x + 10 = 0 \tag{64}$$

   Mais pour cette dernière équation $x^2 + 2x + 10 = 0$ on calcule aussi le discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 10 = 4 - 40 = -36 < 0$. Si nous savons maintenant donner des solutions complexes, nous pouvons aussi nous arrêter là : $\boxed{2 \text{ est la seule solution } \textbf{réelle} \text{ de } P(x) = 0}$.

   Mais comme dès le départ $P(A) = 0$ et que A est réel, on en déduit $\boxed{A = 2}$.
6. On a alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) &= x^2 - (u+v)x + uv && (65)\\ &= \boxed{x^2 - 2x - 2} && (66) \end{aligned}$$

   car nous avons déjà calculé $u + v$ et $u \times v$.
   Nous pouvons alors calculer ses deux racines, qui sont nécessairement égales à u et à v : ici $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$ et les racines sont $x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$ soit $\boxed{x_1 = 1 - \sqrt{3}}$ et $\boxed{x_2 = 1 + \sqrt{3}}$.
7. Il reste à identifier ces deux solutions avec u et v. Mais d'une part ici $x_1 < x_2$, et d'autre part il est clair que $v < u$ (car $10 - 6\sqrt{3} < 10 + 6\sqrt{3}$ et la racine cubique est strictement croissante). On on déduit donc :

$$\boxed{u = 1 + \sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{v = 1 - \sqrt{3}} \tag{67}$$

Problème 2

1. $\boxed{\text{Pour tout } x \in [-1,1], \arcsin(x) \text{ est l'unique } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } \sin(\theta) = x}$ (écrire cette phrase, telle quelle).

2. (a) Si on pose $g : u \mapsto 4u(1-u) = 4u - 4u^2$ alors g est bien défini et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R}$, $g'(u) = 4 - 8u = 4(1-2u)$, qui s'annule en $\frac{1}{2}$. Alternativement, c'est un polynôme du degré 2 et on sait que le sommet de la parabole est entre les deux racines, qui sont ici 0 et 1… Le tableau de variations est donc assez connu :

u	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4u - u^2$		$\nearrow$		$\searrow$	

(68)

Pour la suite nous avons surtout besoin de savoir que $\boxed{g(u) \geqslant 0 \text{ pour } u \in [0,1]}$ et qu'il y a un $\boxed{\text{maximum en } u = \frac{1}{2} \text{ valant } g(\frac{1}{2}) = 1}$.

(b) Soit $x \in [-1,1]$. Élevant tout au carré,

$$\left|2x\sqrt{1-x^2}\right| \leqslant 1 \iff 4x^2(1-x^2) \leqslant 1 \tag{69}$$

Or $x^2 \in [0,1]$. Par la question précédente, on voit que pour $u \in [0,1]$ alors $0 \leqslant 4u(1-u) \leqslant 1$. Ainsi, $\boxed{\text{par équivalence, l'inégalité à démontrer est bien vraie}}$.

(c) Pour tout $x \in [-1,1]$ alors $\boxed{2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1]}$ et donc on peut bien lui appliquer arcsin : tout est bien défini.

3. On a d'abord fixé $x \in [-1,1]$, puis $\theta = \arcsin(x)$, ainsi il est vrai que $x = \sin(\theta)$. On a donc

$$f(x) = \arcsin\left(2\sin(\theta)\sqrt{1-\sin^2(\theta)}\right) \tag{70}$$

Naturellement, à cause de la relation de Pythagore $\cos^2 + \sin^2 = 1$ alors $\sqrt{1-\sin^2(\theta)} = \pm\cos(\theta)$, mais quel signe choisir et comment le justifier ? Par définition $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et sur cet intervalle, $\cos(\theta) \geqslant 0$. Il faut donc choisir $\boxed{\sqrt{1-\sin^2(\theta)} = \cos(\theta)}$. On a alors

$$f(x) = \arcsin\left(2\sin(\theta)\cos(\theta)\right) \tag{71}$$

Mais sous la parenthèse on reconnait la formule de duplication pour sin, et donc $\boxed{f(x) = \arcsin(\sin(2\theta))}$.

4. Supposons $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Alors $2\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dans cet intervalle, l'égalité $\arcsin(\sin(2\theta)) = 2\theta$ est alors bien vérifiée (les deux termes sont dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et ont le même sinus, donc sont égaux). En résumé $\boxed{f(x) = 2\arcsin(x)}$ dans ce cas.

5. En général, il est toujours vrai que $\sin(f(x)) = \sin(2\theta)$ et donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f(x) = 2\theta + 2k\pi$ ou $f(x) = \pi - 2\theta + 2k\pi$. Ces égalités s'écrivent aussi

$$\boxed{f(x) = 2k\pi + 2\arcsin(x) \text{ ou } f(x) = (2k+1)\pi - 2\arcsin(x)} \tag{72}$$

6. Supposons $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, alors dans ce cas $2\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ et donc $\pi - 2\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De plus $\sin(\pi - 2\theta) = \sin(2\theta) = \sin(f(x))$. Encore une fois deux nombres avec le même sinus et tous les deux dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sont égaux, et donc $\pi - 2\theta = f(x)$, ce qui se ré-écrit $\boxed{f(x) = \pi - 2\arcsin(x)}$.

7. Si maintenant $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$, alors $2\theta \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$. Pour quel k a-t-on $2\theta + 2k\pi \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ ou bien a-t-on $(2k+1)\pi - 2\theta \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$? Nous sommes dans ce dernier cas pour $k = -1$, alors $-\pi - 2\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \subset [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$, encore une fois ceci a le même sinus que 2θ et tous les deux sont dans $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ donc ils sont égaux. On en déduit donc $f(x) = -\pi - 2\theta$ soit $\boxed{f(x) = -\pi - 2\arcsin(x)}$ dans ce cas.

8. En résumé, sachant que $\theta = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, alors :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -\pi - 2\arcsin(x) & \text{si } x \in [-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \\ 2\arcsin(x) & \text{si } x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}] \\ \pi - 2\arcsin(x) & \text{si } x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \end{cases}} \tag{73}$$

Problème 3

1. Calcul standard sous forme algébrique :

$$j^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2i \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{74}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 2i\frac{\sqrt{3}}{4} \tag{75}$$
$$= \boxed{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \tag{76}$$

et on reconnait bien là $\boxed{j^2 = \overline{j}}$. On calcule aussi

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \tag{77}$$
$$= \frac{2}{-1 + i\sqrt{3}} \tag{78}$$
$$= \frac{2(-1 - i\sqrt{3})}{1^2 + (\sqrt{3})^2} \tag{79}$$
$$= \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{4} \tag{80}$$
$$= \boxed{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \tag{81}$$

ce qui est $\boxed{\frac{1}{j} = j^2}$. Enfin

$$-1 - j = -1 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{82}$$
$$= \boxed{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \tag{83}$$

on retombe bien encore sur j^2.

2. On pose $z = a + bj$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, alors

$$z = a + b\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{84}$$
$$= a - \frac{b}{2} + i\frac{b\sqrt{3}}{2} \tag{85}$$
$$= \boxed{\frac{2a - b}{2} + i\frac{b\sqrt{3}}{2}} \tag{86}$$

ce qui est la forme algébrique.

On a alors

$$\begin{aligned}
|z|^2 &= \left(\frac{2a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 && (87)\\
&= \frac{(2a-b)^2}{4} + \frac{3b^2}{4} && (88)\\
&= \frac{1}{4}\Big(4a^2 - 4ab + 4b^2\Big) && (89)\\
&= \boxed{a^2 - ab + b^2} && (90)
\end{aligned}$$

3. $\boxed{1 = 1 + 0j}$ donc $1 \in \mathcal{E}$.
   Montrons que $i \notin \mathcal{E}$, par l'absurde. Supposons $i \in \mathcal{E}$. Il existe alors $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$\begin{cases} \frac{2a-b}{2} = 0 \\ \frac{b\sqrt{3}}{2} = 1 \end{cases} \tag{91}$$

   mais ces deux équations impliquent $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$, qui n'est certainement pas un nombre entier. En conclusion $\boxed{i \notin \mathcal{E}}$.
4. Cela revient à montrer que le système de deux équations, d'inconnue (a, b)

$$\begin{cases} \frac{2a-b}{2} = 3 \\ \frac{b\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \end{cases} \tag{92}$$

   admet une solution avec a et b entiers. Mais on trouve immédiatement $b = 4$ puis $a = 5$.
   Conclusion : $\boxed{3 + 2i\sqrt{3} = 5 + 4j \in \mathcal{E}}$.
5. Supposons $z \in \mathcal{E}$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $z = a + bj$. Alors par les propriétés de la conjugaison

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \overline{a + bj} && (93)\\
&= \overline{a} + \overline{bj} && (94)\\
&= a + b\overline{j} && (95)\\
&= a + b(-1 - j) && (96)\\
&= \underbrace{(a - b)}_{\in\mathbb{Z}} - bj && (97)
\end{aligned}$$

   (on utilise que a, b sont réels, et qu'on connait $\overline{j}$) et ceci démontre que $\boxed{\overline{z} \in \mathcal{E}}$.
6. Supposons $(z, w) \in \mathcal{E}^2$. Il existe alors $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ tels que $z = a + bj$ et $w = c + dj$. On a alors d'une part $z + w = (a + c) + (b + d)j$, ce qui démontre directement que $\boxed{z + w \in \mathcal{E}}$. D'autre part pour le produit il y a un calcul, nécessitant de connaitre $j^2 = -1 - j$:

$$\begin{aligned}
z \times w &= (a + bj) \times (c + dj) && (98)\\
&= ac + bcj + adj + bdj^2 && (99)\\
&= ac + (bc + ad)j + bd(-1 - j) && (100)\\
&= \underbrace{(ac - bd)}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(bc + ad + bd)}_{\in\mathbb{Z}} j && (101)
\end{aligned}$$

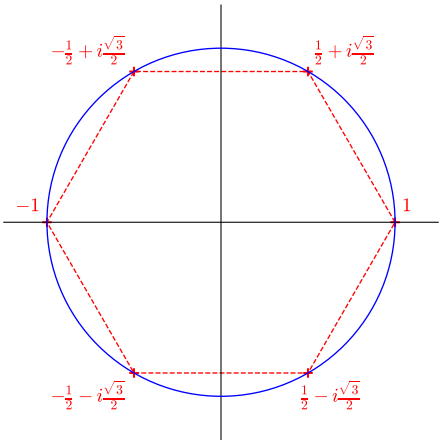
   et ceci montre que $\boxed{z \times w \in \mathcal{E}}$.
7. (a) Supposons $z \in \mathcal{E}$ et $z \neq 0$. Alors $\frac{1}{z}$ existe et, en multipliant en haut et en bas par $\overline{z}$, on obtient $\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}}$.
   Ceci va permettre de répondre à la question, par double implication :
   - Si $|z| = 1$: alors $|z|^2 = 1$, et de plus on sait que $\overline{z} \in \mathcal{E}$. Ainsi $\frac{1}{z} = \overline{z}$ donc $\boxed{\frac{1}{z} \in \mathcal{E}}$.

- Réciproquement, si $\frac{1}{z} \in \mathcal{E}$: alors on peut écrire que $z \times \frac{1}{z} \in \mathcal{E}$, or $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |z| \times \left|z \times \frac{1}{z}\right|$ d'une part donc
$$1 = |z|^2 \times \left|\frac{1}{z}\right|^2 \tag{102}$$
mais d'autre part, avec les questions précédentes, les deux modules au carré d'éléments de $\mathcal{E}$ sont des nombres *entiers*. Si le produit de deux nombres entiers positifs donne 1, ce ne peut être que 1. On en déduit donc
$$\boxed{1 = |z| = \left|\frac{1}{z}\right|} \tag{103}$$

(b) On pose $z = a + bj$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on a vu $|z|^2 = \frac{(2a-b)^2}{4} + \frac{3b^2}{4} = a^2 - ab + b^2$. Sous la première forme il est clair que si b est trop grand alors $|z|^2$ est trop grand, en particulier il n'y a pas de $|z|^2 = 1$ possible si $|b| \geqslant 2$. Cherchons donc pour quels (a, b) on a $|a + bj|^2 = 1$:
- Si $b = 0$: alors on peut avoir $a = 1$ ou $a = -1$. On trouve donc les éléments 1 et -1 de $\mathcal{E}$.
- Si $b = 1$: alors on trouve $a = 0$ ou $a = 1$. Cela correspond aux nombres j et $1 + j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -j^2$.
- Si $b = -1$: alors on trouve $a = 0$ ou $a = -1$. Cela correspond aux nombres $-j$ et $-1 - j = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2$.

En résumé on a bien trouvé 6 éléments de $\mathcal{E}$:
$$\boxed{\left\{z \in \mathcal{E} \setminus \{0\} \;\middle|\; \frac{1}{z} \in \mathcal{E}\right\} = \left\{1, \underbrace{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}_{-j^2}, \underbrace{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}_{j}, -1, \underbrace{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}_{j^2}, \underbrace{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}_{-j}\right\}} \tag{104}$$

(c) On obtient un $\boxed{\text{hexagone régulier}}$ de 6 points bien répartis sur le cercle trigonométrique.



8. *La question difficile*

Il se peut que le dessin précédent aide à se convaincre que ceci est vrai : rajouter le point 0 au centre de l'hexagone, et tout nombre complexe va être à distance au plus 1 d'un point de $\mathcal{E}$. En général, les éléments de $\mathcal{E}$ forment un *réseau hexagonal*.

Soit donc $z \in \mathbb{C}$, qui s'écrit $z = x + yi$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On peut toujours trouver un nombre a entier tel que $|x - a| \leqslant \frac{1}{2}$ (c'est l'entier le plus proche de x, qui est soit $\lfloor x \rfloor$ soit $\lfloor x \rfloor + 1$), et de même on peut trouver un nombre b entier tel que $|y - b| \leqslant \frac{1}{2}$. On pose $w = a + bj$, on a alors $z - w = (x - a) + (y - b)j$ et alors en utilisant l'expression déjà déterminée pour le module :
$$|z - w|^2 = (x - a)^2 - (x - a)(y - b) + (y - b)^2 \tag{105}$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \tag{106}$$
$$\leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \tag{107}$$
$$\leqslant \frac{3}{4} < 1 \tag{108}$$

On a donc bien $\boxed{|z-w|<1}$.