DS 2 Mathématiques
Correction

Exercice 1

(E_1) Le domaine de définition est $\mathbb{R}$. Posons $y = e^x$. Alors

$$(E_1) \iff \begin{cases} 2y^2 - y < 3 \\ y = e^x \end{cases} \tag{1}$$

Pour cette première équation $2y^2 - y < 3 \iff 2y^2 - y - 3 < 0$. C'est une équation de degré 2 habituelle. On pose $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 1 + 24 = 25 = 5^2$. Les deux solutions sont $y = \frac{1 \pm 5}{4}$ soit $y_1 = \frac{3}{2}$ et $y_2 = -1$, et $2y^2 - y - 3 < 0$ pour $y \in \left]-1, \frac{3}{2}\right[$.

Il faut à présent résoudre $e^x = y$. Ceci n'a pas de solutions si $y \leqslant 0$, et sinon a pour solution $y = \ln(x)$. Ainsi

$$e^x \in \left]-1, \frac{3}{2}\right[\tag{2}$$

$$\iff e^x < \frac{3}{2} \tag{3}$$

$$\iff x < \ln\left(\frac{3}{2}\right) \tag{4}$$

car les fonctions exp et ln sont strictement croissantes.

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E_1) est $\left]-\infty, \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right[$

(E_2) L'erreur à ne pas faire est de multiplier par $x^2 - 2x - 8$ des deux côtés, car on ne connait pas son signe et cela pourrait changer le sens de l'inégalité...

Domaine de définition : l'équation n'est pas définie si et seulement si $x^2 - 2x - 8 = 0$. Ici $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-8) = 4 + 32 = 36 = 6^2$, les deux solutions sont $x = \frac{2 \pm 6}{2} = 1 \pm 3$ soit $x = -2$ et $x = 4$. Posons $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$.

Puis pour $x \in \mathscr{D}$ alors

$$(E_2) \iff \frac{2x^2 - 5x - 7}{x^2 - 2x - 8} - 1 \leqslant 0 \tag{5}$$

$$\iff \frac{2x^2 - 5x - 7}{x^2 - 2x - 8} - \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0 \tag{6}$$

$$\iff \frac{(2x^2 - 5x - 7) - (x^2 - 2x - 8)}{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0 \tag{7}$$

$$\iff \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0 \tag{8}$$

En haut apparait un polynôme de degré 2, $x^2 - 3x + 1$, avec $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 = 9 - 4 = 5$ et deux racines $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Posons $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Il reste à tracer un tableau de signe... ce qui nécessite d'ordonner correctement x_1 et x_2 par rapport à -2 et à 4. Mais sachant que $2 < \sqrt{5} < 3$ on trouve facilement $-2 < x_1 < x_2 < 4$. Donc le tableau est

x	$-\infty$		-2		x_1		x_2		4		$+\infty$
x^2-3x+1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-2x-8		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x^2-3x+1}{x^2-2x-8}$		$+$	$\Vert$	$-$		$+$		$-$	$\Vert$	$+$	

(9)

Il n'y a plus qu'à lire : l'ensemble des solutions de (E_2) est

$$\left]-2, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 4\right[\tag{10}$$

(E_3) Le domaine de définition est $\mathbb{R}$. On résout directement :

$$\begin{aligned}
(E_3) &\iff 3 \leqslant \sqrt{x^2+7} < 4 && \text{(définition de la partie entière)} && (11)\\
&\iff 9 \leqslant x^2+7 < 16 && \text{(ici tout est positif)} && (12)\\
&\iff 2 \leqslant x^2 < 9 && -7 && (13)\\
&\iff \sqrt{2} \leqslant x < 3 \text{ ou } -3 < x \leqslant -\sqrt{2} && && (14)
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions est $]-3,-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},3[$.

(E_4) Le domaine de définition est $\mathbb{R}$, raisonnons pas disjonction de cas selon le signe de $2x+3$ sous la valeur absolue.
Cas $2x+3 \geqslant 0$, c'est à dire $x \geqslant -\frac{3}{2}$: alors l'équation (E_4) est équivalente à

$$\begin{aligned}
(E_4) &\iff 2x+3 \leqslant 3x+4 && (15)\\
&\iff -1 \leqslant x && (16)
\end{aligned}$$

et on trouve des solutions pour $x \geqslant -1$ (et on a bien $-1 \geqslant -\frac{3}{2}$).
Cas $2x+3 \leqslant 0$, c'est à dire $x \leqslant -\frac{3}{2}$: alors

$$\begin{aligned}
(E_4) &\iff -(2x+3) \leqslant 3x+4 && (17)\\
&\iff -2x-3 \leqslant 3x+4 && (18)\\
&\iff -7 \leqslant 5x && (19)\\
&\iff -\frac{7}{5} \leqslant x && (20)
\end{aligned}$$

or $-\frac{7}{5} > -\frac{3}{2}$ donc on ne trouve pas de solutions dans ce cas.
Conclusion : l'ensemble des solutions de (E_4) est $[-1,+\infty[$.

Exercice 2

1. On calcule pas à pas $u = 2+i$ donc $u^2 = 3+4i$, puis $u^3 = 2+11i$ et enfin $u^4 = -7+24i$. En remplaçant alors

$$\begin{aligned}
u^4 - 2z^3 - 4z^2 + 14z - 5 &= (-7+24i) - 2(2+11i) - 4(3+4i) + 14(2+i) - 5 && (21)\\
&= (-7-4-12+28-5) + i(24-22-16+14) && (22)\\
&= 0 + 0i && (23)
\end{aligned}$$

Ceci démontre bien que u est solution de (F).

2. Inutile de tout refaire avec $\overline{u} = 2-i$, en effet

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{u^4 - 2u^3 - 4u^2 + 14u - 5} && (24)\\
&= \overline{u^4} - \overline{2u^3} - \overline{4u^2} + \overline{14u} - \overline{5} && (25)\\
&= \overline{u}^4 - 2\overline{u}^3 - 4\overline{u}^2 + 14\overline{u} - 5 && (26)
\end{aligned}$$

et ceci démontre que $\overline{u}$ est aussi une solution de (F).
Le polynôme de degré 2 dont u et $\overline{u}$ sont exactement les deux solutions est $z \mapsto (z-u)(z-\overline{u}) = 0$ et ceci se développe en $z^2 - (u+\overline{u})z + u\overline{u}$ (on retrouve les relations entre coefficients et sommes et produits des racines). Mais ici $u + \overline{u} = 4$ et $u\overline{u} = 2^2 + 1^2 = 5$. Le polynôme recherché est donc $P : z \mapsto z^2 - 4z + 5$.

3. Analyse : si un tel $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ existe, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
z^4 - 2z^3 - 4z^2 + 14z - 5 &= (z^2 - 4z + 5) \times (az^2 + bz + c) && (27)\\
&= (az^4 + bz^3 + cz^2) + (-4az^3 - 4bz^2 - 4cz) + (5az^2 + 5bz + 5c) && (28)\\
&= az^4 + (b-4a)z^3 + (c-4b+5a)z^2 + (-4c+5b)z + 5c = 0 && (29)
\end{aligned}$$

qui sera vérifié si (a, b, c) est solution du système

$$(S) \quad \begin{cases} a = 1 & (L_1) \\ b - 4a = -2 & (L_2) \\ c - 4b + 5a = -4 & (L_3) \\ (-4c + 5b) = 14 & (L_4) \\ 5c = -5 & (L_5) \end{cases} \tag{30}$$

On trouve alors rapidement $a = 1$ (avec (L_1)) et $c = -1$ (avec (L_5)), d'où $b = 2$ (avec (L_3)) et il reste encore à vérifier que ces valeurs sont bien solutions de (L_3) et de (L_4), ce qui est bien le cas.
Conclusion : on pose $(a, b, c) = (1, 2, -1)$ et on a bien

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^4 - 2z^3 - 4z^2 + 14z - 5 = (z^2 - 4z + 5) \times (z^2 + 2z - 1) \tag{31}$$

4. On en déduit que z est solution de (F) si et seulement si $(z^2 - 4z + 5) \times (z^2 + 2z - 1) = 0$ c'est à dire $z^2 - 4z + 5 = 0$ ou $z^2 + 2z - 1 = 0$.
   La première de ces deux équations a pour solutions u et $\overline{u}$ déjà déterminés.
   La deuxième a $\Delta = 2^2 - 4 \times (+1) = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$ dont les solutions sont $\frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$.
   Conclusion : l'ensemble des solutions de (F) est $\{2 + i, 2 + i, -1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\}$.

Exercice 3

1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \sin(7\theta) = \sin(3\theta) && (32) \\ \iff & \exists k \in \mathbb{Z},\ 7\theta = 3\theta + 2k\pi \text{ ou } 7\theta = \pi - 3\theta + 2k\pi && (33) \\ \iff & \exists k \in \mathbb{Z},\ 4\theta = 2k\pi \text{ ou } 10\theta = \pi + 2k\pi && (34) \\ \iff & \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{2k\pi}{4} \text{ ou } \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{5} && (35) \\ \iff & \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = k\frac{\pi}{2} \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5} && (36) \end{aligned}$$

   Conclusion : l'ensemble des solutions est

$$\left\{ k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \tag{37}$$

2. Pour traiter la question il est nécessaire d'avoir sous les yeux (en sachant les retrouver rapidement sur son brouillon) les formules de linéarisation :

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \qquad \sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \Big) \tag{38}$$

   On écrit alors, par exemple en commençant par remplacer le terme en $\cos^2$,

$$\begin{aligned} \sin(5\theta)\cos^2(3\theta) &= \sin(5\theta) \times \left(\frac{1 + \cos(2 \times 3\theta)}{2} \right) && (39) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sin(5\theta) + \sin(5\theta)\cos(6\theta) \Big) && (40) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(5\theta) + \frac{1}{2}\Big(\sin(5\theta + 6\theta) + \sin(5\theta - 6\theta) \Big) \right) && (41) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(5\theta) + \frac{1}{2}\Big(\sin(11\theta) + \sin(-\theta) \Big) \right) && (42) \\ &= \frac{1}{4}\Big(2\sin(5\theta) + \sin(11\theta) - \sin(\theta) \Big) && (43) \end{aligned}$$

3. (a) Analyse : si de tels r, φ existent alors

$$\begin{aligned}\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos(\theta)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\theta) &= r\cos(\theta+\varphi) && (44)\\ &= r(\cos(\theta)\cos(\varphi)-\sin(\theta)\sin(\varphi) && (45)\\ &= (r\cos(\varphi))\cos(\theta)-(r\sin(\varphi))\sin(\theta) && (46)\end{aligned}$$

et l'égalité sera vraie si on peut déterminer r et φ tels que

$$\begin{cases} r\cos(\varphi)=1 & (L_1)\\ -r\sin(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{3}} & (L_2)\end{cases} \tag{47}$$

Alors $(L_1)^2+(L_2)^2$ donne $r^2\cos^2(\varphi)+r^2\sin^2(\varphi)=1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$ soit $r^2=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$. On prend alors $r=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Nous sommes ramenés à trouver φ tel que

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\varphi)=1\\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases} \iff \begin{cases}\cos(\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(\varphi)=-\frac{1}{2}\end{cases} \tag{48}$$

Il s'agit bien d'une valeur remarquable, on pose $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.
Conclusion : en définissant ces r et φ on a bien montré que

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos(\theta)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\theta)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) \tag{49}$$

(b) L'équation (G) est donc équivalente à

$$\begin{aligned}(G) &\iff \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} && (50)\\ &\iff \cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4} && (51)\end{aligned}$$

Ici ce **n'est pas** une valeur remarquable donc il nous faut utiliser arccos (en ayant vérifié que $\frac{\sqrt{3}}{4}\in[-1,1]$). En conclusion

$$\begin{aligned}(G) &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta-\frac{\pi}{6}=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+2k\pi \text{ ou } \theta-\frac{\pi}{6}=-\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+2k\pi && (52)\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta=\frac{\pi}{6}+\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+2k\pi \text{ ou } \theta=\frac{\pi}{6}-\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+2k\pi && (53)\\ & && (54)\end{aligned}$$

et l'ensemble des solutions de (G) peut s'écrire

$$\left\{\frac{\pi}{6}+\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+2k\pi\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}-\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+2k\pi\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\} \tag{55}$$

4. On calcule la tangente des deux côtés, sachant que d'une part $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, d'autre part, posons $\alpha=$

$\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ alors

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha) &= \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1-\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)\times\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)} && (56)\\
&= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}} && (57)\\
&= \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} && (58)\\
&= \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} && (59)\\
&= \frac{7}{9} && (60)
\end{aligned}$$

De même on calcule alors

$$\begin{aligned}
\tan\left(\alpha+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right) &= \frac{\tan(\alpha)+\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right)}{1-\tan(\alpha)\times\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right)} && (61)\\
&= \frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}} && (62)\\
&= \frac{\frac{65}{72}}{1-\frac{7}{72}} && (63)\\
&= \frac{\frac{65}{72}}{\frac{65}{72}} && (64)\\
&= 1 && (65)
\end{aligned}$$

Conclusion : les deux membres de l'égalité à démontrer ont bien la même tangente.
Pour démontrer qu'ils sont égaux il reste à voir qu'ils sont bien tous les deux dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, domaine où la fonction tangente prend une unique fois chaque valeur. Or c'est bien le cas de $\frac{\pi}{4}$, et d'autre part on sait que si $x\geqslant 0$ alors $0\leqslant\arctan(x)\leqslant x$ donc

$$\begin{aligned}
0\leqslant\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right) &\leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8} && (66)\\
&= \frac{7}{10}+\frac{1}{8} && (67)\\
&= \frac{33}{40} && (68)
\end{aligned}$$

Ceci est clairement $<\frac{\pi}{2}$, par exemple c'est inférieur à 1 mais $\pi>3$ donc $\frac{\pi}{2}>1$. Et cela conclut l'inégalité demandée.

Problème 1

1. (a) Par définition $\mu^3=7+5\sqrt{2}$ et $\nu^3=7-5\sqrt{2}$. On en déduit alors $\mu^3+\nu^3=14$.
De plus pour le produit

$$\begin{aligned}
\mu\times\nu &= \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\times\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} && (69)\\
&= \sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})\times(7-5\sqrt{2})} && (70)\\
&= \sqrt[3]{7^2-(5\sqrt{2})^2} && (71)\\
&= \sqrt[3]{49-2\times 25} && (72)\\
&= \sqrt[3]{-1} && (73)\\
&= -1 && (74)
\end{aligned}$$

En effet la règle de calcul $\sqrt[3]{\alpha} \times \sqrt[3]{\beta} = \sqrt[3]{\alpha \times \beta}$ est bien vraie (on peut l'écrire avec des puissances 1/3), car $\sqrt[3]{\alpha} \times \sqrt[3]{\beta}$ est bien un nombre dont le cube donne $\alpha \times \beta$ donc c'est $\sqrt[3]{\alpha \times \beta}$; et à la fin $\sqrt[3]{-1} = -1$ car $(-1)^3 = -1$.

(b) On trouve

$$\begin{aligned}(\mu+\nu)^3 &= \mu^3 + 3\mu^2\nu + 3\mu\nu^2 + \nu^3 && (75)\\ &= \mu^3 + \nu^3 + 3\mu\nu(\mu+\nu) && (76)\\ &= 14 - 3(\mu+\nu) && (77)\end{aligned}$$

2. On pose $\lambda = \mu + \nu$ et $P : x \mapsto x^3 + 3x - 14$.
   (a) L'équation précédente donne $\lambda^3 = 14 - 3\lambda$, ce qui se ré-écrit $\lambda^3 + 3\lambda - 14 = 0$.
   (b) On vérifie facilement $P(2) = 0$.
   Analyse : si de tels $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ existent alors

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ x^3 + 3x - 14 &= (x-2)(ax^2 + bx + c) && (78)\\ &= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c && (79)\\ &= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c && (80)\end{aligned}$$

   et donc on cherche (a, b, c) vérifiant le système d'équations

$$\begin{cases} a = 1\\ b - 2a = 0\\ c - 2b = 3\\ -2c = -14 \end{cases} \tag{81}$$

   dont on trouve rapidement que $a = 1$, $c = 7$ puis $b = 2$ vérifient les quatre équations du système.
   Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 + 3x - 14 = (x-2)(x^2 - 2x + 7) \tag{82}$$

   (c) On on déduit

$$x^3 + 3x - 14 = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x^2 - 2x + 7 = 0 \tag{83}$$

   Pour cette dernière équation de degré 2 on trouve $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 7 = 4 - 28 = -24 < 0$. Pas besoin d'aller plus loin : il n'y a pas de solutions réelles.
   En conclusion $x = 2$ est la seule solution réelle de l'équation $P(x) = 0$.
   (d) Mais comme $P(\mu + \nu) = 0$ et que $\mu + \nu$ est réel, on en déduit $\mu + \nu = 2$.
3. On connait $\mu + \nu = 2$ et $\mu\nu = -1$. Par les relations entre coefficients et somme et produits des racines, ce sont donc les deux solutions de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ (obtenue en développant $(x-\mu)(x-\nu) = x^2 - (\mu+\nu)x + \mu\nu$).
4. L'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ est une équation de degré 2 avec $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$. Elle admet donc pour solutions $x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. L'une est donc égale à μ et l'autre à ν. Mais pour choisir il suffit de voir que $\nu < \mu$, et donc en conclusion $\mu = 1 + \sqrt{2}$ et $\nu = 1 - \sqrt{2}$.

Problème 2

Il s'agit d'être particulièrement soigneux avec les domaines de définition en jeu dans ce problème.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ alors il est toujours vrai que $x^2 < 1 + x^2$, et donc cela signifie l'encadrement

$$-\sqrt{1+x^2} < x < \sqrt{1+x^2}. \tag{84}$$

   Divisant deux deux côtés par $\sqrt{1+x^2} > 0$, on trouve bien $-1 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1$.

2. *Mini erreur dans l'énoncé : il s'agit bien entendu d'exprimer x en fonction de y, ce qui est censé apparaitre dans la démonstration.*
Soit $y \in]-1,1[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est équivalente à $y\sqrt{1+x^2} = x$. Passant au carré des deux cotés (on perd alors l'équivalence !) on obtient $y^2(1+x^2) = x^2$, ce qui (le but est d'isoler x) donne rapidement $y^2 = x^2 - y^2x^2$ soit $y^2 = (1-y^2)x^2$ d'où on tire
$$x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \tag{85}$$
Le dénominateur n'est pas nul car par hypothèse $y^2 < 1$, et est même strictement positif.
On en déduit donc $x = \pm\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$. Mais quel signe choisir ? En fait il suffit de voir que dans $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ alors x et y on même signe, ainsi dans l'équation ci-dessus si leurs carrés sont égaux alors les deux nombres réels x et $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ sont égaux (on pourrait aussi raisonner par disjonction de cas). On trouve donc bien
$$x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \tag{86}$$
3. Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Alors $\cos(\theta) \neq 0$, $\tan(\theta)$ est bien définie et $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. De plus par Pythagore $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ donc $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$, donc $\cos(\theta) = \pm\sqrt{1-\sin^2(\theta)}$. Mais nous travaillons sur un intervalle sur lequel $\cos(\theta) > 0$, ainsi $\cos(\theta) = +\sqrt{1-\sin^2(\theta)}$. Et ceci donne l'égalité demandée.
4. Nous avons tout ce qu'il faut pour conclure, mais attention à la logique !
Dans la formule précédente, si on pose $y = \sin(\theta)$, alors $y \in]-1,1[$ et $\theta = \arcsin(y)$. De plus on pose $x = \tan(\theta)$, alors $\theta = \arctan(x)$. Alors par la question 2 on trouve la relation $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, donc θ est égal à $\arcsin(y) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ d'une part et à $\arctan(x)$ d'autre part. C'est la relation à montrer.
Mais comme le quantificateur est bien $\forall x$, il faut **partir de** $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On écrit alors qu'il existe θ tel que $x = \tan(\theta)$, c'est $\theta = \arctan(x)$ qui est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et on pose $y = \sin(\theta)$ qui est alors dans $]-1,1[$. Alors x et y sont liés par la formule de la question 2. D'où on déduit comme annoncé que
$$\arcsin(y) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \tag{87}$$
d'une part, et
$$\arcsin(y) = \theta = \arctan(x) \tag{88}$$
d'autre part, ce qui donne la formule demandée.

Problème 3

1. (E_1) est l'équation $z = 1$, de solution $z = 1$.
(E_2) est l'équation $2z^2 = z + 1$, équivalente à $2z^2 - z - 1 = 0$. C'est une équation de degré 2 avec $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9 = 3^2$, de solutions $z = \frac{1\pm3}{4}$ soit $z = 1$ et $z = -\frac{1}{2}$.
2. On voit que $u = 1$ est solution évidente de (E_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. (a) L'équation (E_3) se ré-écrit $3z^3 - z^2 - z - 1 = 0$.
Analyse : si un tel $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ existe alors
$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C},\ 3z^3 - z^2 - z - 1 &= (z-1)(az^2+bz+c) && (89)\\ &= az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c && (90)\\ &= az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c && (91)\end{aligned}$$
et donc on veut (a,b,c) tels que
$$\begin{cases} a = 3 \\ b - a = -1 \\ c - b = -1 \\ -c = -1 \end{cases} \tag{92}$$

dont on trouve rapidement que $a = 3$, $c = 1$, $b = 2$ vérifie bien toutes les équations.
Conclusion : on a bien

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad 3z^3 - z^2 - z - 1 = (z-1)(3z^2 + 2z + 1) \tag{93}$$

et donc

$$(E_3) \iff (z-1)(3z^2+2z+1) = 0 \tag{94}$$
$$z = 1 \text{ ou } 3z^2 + 2z + 1 = 0 \tag{95}$$

(b) On en déduit que les solutions de (E_3) sont $z = 1$ et les solutions de $3z^2 + 2z + 1 = 0$. Cette dernière est une équation de degré 2 avec $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8 = (2i\sqrt{2})^2$, donc les solutions sont $z = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{2}}{2\times 3}$ soit $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3}$.

(c) Ces deux-là étant complexes conjuguées, elles ont même module donc il suffit de calculer le module de l'une, et même le module au carré. Or

$$\left|\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right|^2 = \frac{1^2 + (\sqrt{2})^2}{3^2} = \frac{1+2}{9} = \frac{1}{3} < 1 \tag{96}$$

4. (a) Montrons par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \underbrace{\forall (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n, \ |w_1 + \dots + w_n| \leqslant |w_1| + \dots + |w_n|}_{P(n)} \tag{97}$$

Initialisation : pour $n = 1$ il s'agit de montrer $\forall w_1 \in \mathbb{C}$, $|w_1| \leqslant |w_1|$, il n'y a rien à faire.
Remarquons que pour $n = 2$ il s'agit de l'inégalité triangulaire, classique, dans $\mathbb{C}$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$. On se donne alors $(w_1, \dots, w_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ quelconque. Alors

$$|w_1 + \dots + w_{n+1}| \tag{98}$$
$$= |(w_1 + \dots + w_n) + w_{n+1}| \tag{99}$$
$$\leqslant |(w_1 + \dots + w_n)| + |w_{n+1}| \qquad \text{(inégalité triangulaire classique)} \tag{100}$$
$$\leqslant \Big(|w_1| + \dots + |w_n|\Big) + |w_{n+1}| \qquad \text{(par } P(n)\text{)} \tag{101}$$
$$= |w_1| + \dots + |w_n| + |w_{n+1}| \tag{102}$$

et c'est bien l'égalité voulue pour démontrer $P(n+1)$.
Conclusion : par récurrence on a bien démontré $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. On sait alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ alors $|z^k| = |z|^k$. Mais si $|z| > 1$ alors pour $k < n$ on déduit $|z|^k < |z|^n$ (et l'inégalité est dans l'autre sens si $|z| < 1$, ce sont des propriétés de base des fonctions puissances). Ainsi on déduit

$$|1 + z + \dots + z^{n-1}| \tag{103}$$
$$\leqslant |1| + |z| + \dots + |z^{n-1}| \qquad \text{(question précédente)} \tag{104}$$
$$< |z|^n + |z|^n + \dots + |z|^n \qquad \text{(car } |z| > 1\text{)} \tag{105}$$
$$= n|z|^n \qquad \text{(il y a } n \text{ termes)} \tag{106}$$

(c) Par l'absurde. Supposons que (E_n) ait une solution $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$. Alors on obtient

$$n|z|^n = |nz^n| = |z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1| \tag{107}$$

mais avec la question précédente ceci est $< n|z|^n$, ce qui est contradictoire.
L'équation (E_n) ne peut donc pas avoir de solutions $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > 1$.