Correction
DS 2 Mathématiques

Durée : 3 heures. Calculatrices et documents non autorisés.
Les exercices et les problèmes peuvent être traités indépendamment. Dans les exercices les questions sont indépendantes. Dans les problèmes, même s'il est toujours possible de sauter une question, il est bon de prêter attention à la progression des questions et à la structure globale du problème, et de vérifier que les calculs sont corrects avant de passer à la suite.
*Il faut avant tout **bien** faire ce qui est fait.*

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) \quad |z-5i| = |\bar{z}-3+4i| \qquad\qquad (F) \quad \frac{z^2+9}{z-5} = 4$$

Correction. (E) On cherche une solution sous forme $z = x+yi$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $z-5i = x+(y-5)i$ d'une part, et

$$\bar{z}-3+4i = (x-iy)-3+4i = (x-3)+(4-y)i$$

d'autre part. Alors

$$\begin{aligned}(E) &\iff |z-5i|^2 = |\bar{z}-3+4i|^2 \\ &\iff x^2+(y-5)^2 = (x-3)^3+(4-y)^2 \\ &\iff x^2+y^2-10y+25 = x^2-6x+9+16+y^2-8y \\ &\iff -10y = -6x-8y \\ &\iff 6x = 2y \\ &\iff 3x = y\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{z = x+yi \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } 3x = y\} \tag{1}$$

Géométriquement c'est une droite passant par 0, c'est aussi l'ensemble des $\{x(1+3i) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
(F) D'abord il faut $z \neq 0$. On a ensuite

$$\begin{aligned}(F) &\iff z^2+9 = 4(z-5) \\ &\iff z^2+9 = 4z-20 \\ &\iff z^2-4z+29 = 0\end{aligned}$$

On est face à une équation polynomiale du second degré à coefficients réels. On calcule $\Delta = (-4)^2-4\times 29 = 16-116 = -100$. Ceci est le carré de $\delta = 10i$. Les solutions sont alors

$$z = \frac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i$$

L'ensemble des solutions est $\{2-5i, 2+5i\}$.

□

Exercice 2. 1. (a) Simplifier $\sqrt{3}\cos(x) - 3\sin(x)$ (avec $x \in \mathbb{R}$) sous forme $r\cos(x+\varphi)$, $r \geqslant 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Correction. On développe :

$$r\cos(x+\varphi) = r\Big(\cos(x)\cos(\varphi) - \sin(x)\sin(\varphi)\Big) = (r\cos(\varphi))\cos(x) - (r\sin(\varphi))\sin(x)$$

Ceci est égal à $\sqrt{3}\cos(x) - 3\sin(x)$ dès que

$$\begin{cases} r\cos(\varphi) = \sqrt{3} & (L_1) \\ r\sin(\varphi) = 3 & (L_2)\end{cases}$$

alors $(L_1)^2 + (L_2)^2$ (et la relation de Pythagore) nous donne $r^2 = (\sqrt{3})^2 + 3^2 = 3 + 9 = 12$. On prend donc $r = +\sqrt{12}$ $(r \geqslant 0) = 2\sqrt{3}$. Puis on cherche φ tel que

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}\cos(\varphi) = \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}\sin(\varphi) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{3}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

et on remarque que $\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\times\sqrt{3}}{2\times 3}$ (multiplier en haut et en bas par $\sqrt{3}$) $= \frac{\sqrt{3}}{2}$. Bref, c'est une valeur remarquable, et on prend $\varphi = \frac{\pi}{3}$. On a alors montré :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{3}\cos(x) - 3\sin(x) = 2\sqrt{3}\cos(x + \tfrac{\pi}{3})$$

□

(b) Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos(x) - 3\sin(x) = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Correction. Cela revient donc à :

$$\begin{aligned} &\sqrt{3}\cos(x) - 3\sin(x) = 1 \\ \iff &2\sqrt{3}\cos(x + \tfrac{\pi}{3}) = 1 \\ \iff &\cos(x + \tfrac{\pi}{3}) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Ceci n'est pas une valeur remarquable (c'est la vie), mais est bien dans $[-1, 1]$. On pose alors

$$x_0 = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

et notre équation est équivalente à

$$\begin{aligned} \cos(x + \tfrac{\pi}{3}) = \frac{1}{2\sqrt{3}} &\iff \cos(x + \tfrac{\pi}{3}) = \cos(x_0) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \left(x + \frac{\pi}{3} = x_0 + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{3} = -x_0 + 2k\pi\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \left(x = x_0 - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -x_0 - \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \end{aligned}$$

□

2. (a) Retrouver la formule pour $\cos(\alpha) - \cos(\beta)$ (avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$).

Correction. Avec par exemple l'angle moitié : on part de

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} - e^{i\beta} &= e^{i(\alpha+\beta)/2}(e^{i(\alpha-\beta)/2} - e^{i(\beta-\alpha)/2}) \\ &= e^{i(\alpha+\beta)/2}(e^{i(\alpha-\beta)/2} - e^{-i(\alpha-\beta)/2} \\ &= e^{i(\alpha+\beta)/2} \times 2i\sin(\tfrac{\alpha-\beta}{2}) \end{aligned}$$

Alors la partie réelle est d'une part $\cos(\alpha) - \cos(\beta)$, mais aussi avec le terme de droite c'est

$$-2\sin(\tfrac{\alpha+\beta}{2})\sin(\tfrac{\alpha-\beta}{2})$$

□

(b) Résoudre l'équation $\cos(21\theta) = \cos(15\theta)$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \cos(21\theta) = \cos(15\theta) &\iff \cos(21\theta) - \cos(15\theta) = 0 \\ &\iff -\sin(\tfrac{21+15}{2}\theta)\sin(\tfrac{21-15}{2}\theta) = 0 \\ &\iff -\sin(18\theta)\sin(3\theta) = 0 \\ &\iff \sin(18\theta) = 0 \text{ ou } \sin(3\theta) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}\left(18\theta = 2k\pi \text{ ou } 18\theta = \pi + 2k\pi\right) \\ &\qquad \text{ou } \exists \ell \in \mathbb{Z}\left(3\theta = 2\ell\pi \text{ ou } 3\theta = \pi + 2\ell\pi\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}\left(\theta = \frac{k\pi}{9} \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9}\right) \\ &\qquad \text{ou } \exists \ell \in \mathbb{Z}\left(\theta = \frac{2\ell\pi}{3} \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2\ell\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

3. (a) Rappeler l'identité remarquable $(a+b)^3$ (avec $(a,b)\in\mathbb{C}^2$).

Correction. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ à savoir par cœur ou bien en développant $(a+b)\times(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$, valable aussi bien dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{C}$. □

(b) Linéariser $\sin^3(\theta)$ puis $\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)$ (avec $\theta\in\mathbb{R}$).

Correction. D'abord on part de $\sin(\theta)=\mathrm{Im}(e^{i\theta})=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\sin^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3\\
&= \frac{\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3}{2^3\times i^3}\\
&= \frac{e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}}{-8i}\\
&= \frac{(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta})-3(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{-4\times 2i}\\
&= \frac{2i\sin(3\theta)-3\times 2i\sin(\theta)}{-4\times 2i}\\
&= \frac{\sin(3\theta)-3\sin(\theta)}{-4}\\
&= \frac{3\sin(\theta)-\sin(3\theta)}{4}
\end{aligned}$$

Pour $\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)$ on écrit $\cos(\theta)=\mathrm{Re}(e^{i\theta})=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ donc

$$\begin{aligned}
\cos^2(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2\\
&= \frac{\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2}{4}\\
&= \frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2}{4}
\end{aligned}$$

puis on ré-insère au bon endroit dans les équations précédentes :

$$\begin{aligned}
&\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)\\
&= \frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2}{4}\times\frac{e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}}{-8i}\\
&= \frac{1}{-32i}(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2)\times(e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta})\\
&= \frac{1}{-32i}\Big((e^{5i\theta}-3e^{3i\theta}+3e^{i\theta}-e^{-i\theta})+(e^{i\theta}-3e^{-i\theta}+3e^{-3i\theta}-e^{-5i\theta})+(2e^{3i\theta}-6e^{i\theta}+6e^{-i\theta}-2e^{-3i\theta})\Big)\\
&= \frac{1}{-32i}\Big((e^{5i\theta}-e^{-5i\theta})+(-e^{3i\theta}+e^{-3i\theta})+(-2e^{i\theta}+2e^{-i\theta})\Big)\\
&= \frac{1}{-32i}\Big((e^{5i\theta}-e^{-5i\theta})-(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta})-2(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\Big)\\
&= \frac{1}{-16\times 2i}\Big(2i\sin(5\theta)-2i\sin(3\theta)-2\times 2i\sin(\theta)\Big)\\
&= \frac{-1}{16}\Big(\sin(5\theta)-\sin(3\theta)-2\sin(\theta)\Big)\\
&= \frac{1}{16}\Big(2\sin(\theta)+\sin(3\theta)-\sin(5\theta)\Big)
\end{aligned}$$

□

Exercice 3. Le but est de démontrer les deux formules suivantes :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \sin(\arctan(x))=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\quad\text{et}\quad\cos(\arctan(x))=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\tag{2}$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) \neq 0$.

   Correction. $\theta = \arctan(x)$ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par définition. Sur cet intervalle, $\cos(\theta) > 0$ (en particulier $\cos(\theta) \neq 0$). □

2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = \frac{\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))} \tag{3}$$

   Correction. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\tan(\arctan(x)) = x$ (toujours vrai). Ceci nous donne donc

$$x = \frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))}$$

   et en élevant au carré on trouve l'égalité demandée. □

3. Conclure soigneusement.

   Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$. Occupons nous d'abord de la formule pour cos, avec l'identité de Pythagore remplaçons $\sin^2(\arctan(x))$ par $1 - \cos^2(\arctan(x))$. Posons $u = \cos(\arctan(x))$ (pour se simplifier la vie). Alors nous avons l'équation

$$\begin{aligned} x^2 = \frac{1-u^2}{u^2} &\iff x^2u^2 = 1 - u^2 \\ &\iff u^2(1+x^2) = 1 \\ &\iff u^2 = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

   Il reste à conclure soigneusement pour trouver la formule pour cos : le terme de droite est toujours bien défini et positif car $1+x^2 > 0$. D'autre part on a vu à la question 1 (ou bien on remarque maintenant) que $u > 0$. Cela autorise à passer à la racine carrée pour obtenir

$$u = \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

   Ensuite, de $x = \frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))}$ on tire

$$\sin(\arctan(x)) = x \times \cos(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

   Alternativement, on pose $v = \sin(\arctan(x))$ et on remplace avec Pythagore $\cos^2(\arctan(x))$ par $1 - v^2$. On aboutit à l'équation pour v :

$$\begin{aligned} x^2 = \frac{v^2}{1-v^2} &\iff x^2(1-v^2) = v^2 \\ &\iff v^2(1+x^2) = x^2 \\ &\iff v^2 = \frac{x^2}{1+x^2} \end{aligned}$$

   ce qui nécessite d'être encore plus soigneux pour écrire des racines carrée. Soit $x \geqslant 0$, auquel cas $\arctan(x) \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et sur ce domaine le sinus est positif. Soit $x \leqslant 0$, auquel cas $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$ et sur ce domaine le sinus est négatif. Bref, ci-dessus v et x ont même signe donc on a bien le droit d'écrire

$$v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

   □

Premier problème

Le but de ce problème est de présenter une méthode pour obtenir et vérifier des formules « de type Machin ».
On admet qu'on sait au moins que $3 < \pi < 4$.

1. Soit un entier $n \geqslant 1$. Écrire le nombre complexe $n + i$ sous forme exponentielle. On exprimera à l'aide de la fonction arctangente son unique argument dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Correction. D'abord $|n+i|^2 = n^2+1$ donc $r = |n+i| = \sqrt{n^2+1}$. Puis on cherche à écrire $n+i = re^{i\theta}$. Cela donne les équations

$$\begin{cases} r\cos(\theta) = n & (L_1) \\ r\sin(\theta) = 1 & (L_2) \end{cases}$$

On remarque qu'alors dans ce cas, en divisant (L_2) par (L_1) on trouve

$$\frac{1}{n} = \frac{r\sin(\theta)}{r\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

Un argument dans $]-\pi,\pi]$ est donc $\arctan(\frac{1}{n})$ ou bien $\arctan(\frac{1}{n})+\pi$ ou bien $\arctan(\frac{1}{n})-\pi$. Mais les équations ci-dessus impliquent que θ se situe dans le premier cadrant et donc θ est en fait dans $[0,\frac{\pi}{2}[$. Donc il faut choisir $\theta = \arctan(\frac{1}{n})$ comme argument. □

2. Simplifier le nombre complexe $z = (2+i)(3+i)$.

   Correction. Basique ! C'est $6+2i+3i-1 = 5+5i$. □

3. En exprimant son argument de deux façons différentes, démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \tag{4}$$

   Correction. D'une part $5+5i = 5(1+i)$. Son module est donc $5\sqrt{1^2+1^2} = 5\sqrt{2}$. Son argument est un nombre θ tel que

$$\begin{cases} 5\sqrt{2}\cos(\theta) = 5 \\ 5\sqrt{2}\sin(\theta) = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

   et donc on peut prendre $\theta = \frac{\pi}{4}$ comme argument.
   D'autre part si on écrit sous forme exponentielle $2+i = r_1e^{i\theta_1}$ et $3+i = e^{i\theta_2}$ alors

$$(2+i)(3+i) = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

   Ainsi $\theta_1+\theta_2$ est aussi un argument de z et on a vu qu'on pouvait prendre $\theta_1 = \arctan(\frac{1}{2})$ et $\theta_2 = \arctan(\frac{1}{3})$. Comme les arguments de z sont uniques modulo 2π cela signifie bien qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta_1+\theta_2+2k\pi$ et c'est la formule demandée. □

4. On admet l'inégalité suivante :

$$\forall x \in [0,\tfrac{\pi}{2}[, \quad \tan(x) \geqslant x \tag{5}$$

   Démontrer qu'alors

$$\forall y \in [0,+\infty[, \quad \arctan(y) \leqslant y \tag{6}$$

   Correction. Soit $y \in [0,+\infty[$. Alors $y = \tan(\arctan(y))$ (toujours vrai), qui est donc $\geqslant \arctan(y)$ par l'inégalité admise (en posant $x = \arctan(y)$). □

5. En déduire la formule

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \tag{7}$$

   Correction. Il s'agit de démontrer des inégalités pour vérifier que ces deux termes sont suffisemment proches et ne peuvent donc pas différer d'un multiple de 2π, donc qu'ils sont égaux ($k=0$ ci-dessus). Par exemple :
   Comme $0 \leqslant \pi < 4$, le membre de gauche est dans $[0,1[$. À droite

$$0 \leqslant \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$$

   donc il est aussi dans $[0,1[$. La différence des deux est donc dans $]-1,1[$ et le seul multiple de π contenu dedans est 0. Donc $k=0$ et on a bien égalité. □

6. Reprendre la même méthode avec $z = (2+i)(5+i)(8+i)$ et en déduire la formule

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \tag{8}$$

Correction. En développant on trouve

$$\begin{aligned} z &= (2+i)(40-1+5i+8i) \\ &= (2+i)(39+13i) \\ &= 78-13+39i+26i \\ &= 65+65i \\ &= 65(1+i) = 65\sqrt{2}e^{i\pi/4} \end{aligned}$$

Un argument est donc encore $\frac{\pi}{4}$ (peu importe le module !). Mais si on écrit sous forme expontielle $2+i = r_1 e^{i\theta_1}$ (avec $\theta_1 = \arctan(\frac{1}{2})$), $5+i = r_2 e^{i\theta_2}$ (avec $\theta_2 = \arctan(\frac{1}{5})$), $8+i = r_3 e^{i\theta_3}$ (avec $\theta_3 = \arctan(\frac{1}{8})$) alors

$$z = r_1 r_2 r_3 e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$$

donc un argument est aussi $\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{8})$. Pour conclure l'égalité des arguments, il suffit de majorer :

$$0 \leqslant \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{13}{24} < 1$$

et comme avant cela suffit. □

7. Reprendre les calculs avec les nombres $(3+i)^2(7+i)$ ainsi que $\frac{(2+i)^2}{7+i}$. Quelles formules de type Machin obtient-on ?

Correction. D'abord

$$(3+i)^2(7+i) = (9-1+6i)(7+i) = (8+6i)(7+i) = 56-6+(42+8)i = 50+50i = 50(1+i) = 50\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

C'est encore un nombre d'argument $\frac{\pi}{4}$. Mais si on écrit $3+i = r_1 e^{i\theta_1}$ avec $\theta_1 = \arctan(\frac{1}{3})$ et $2+i = r_2 e^{i\theta_2}$ avec $\theta_2 = \arctan(\frac{1}{7})$ alors ce nombre est aussi égal à

$$(r_1 e^{i\theta_1})^2 \times r_2 e^{i\theta_2} = r_1^2 r_2 e^{i(2\theta_1+\theta_2)}$$

donc un argument est aussi $2\arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{7})$. Pour conclure il faut majorer :

$$0 \leqslant 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) \leqslant 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{15}{21} < 1$$

donc on a bien l'égalité

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

Pour l'autre nombre :

$$\frac{(2+i)^2}{7+i} = \frac{4-1+4i}{7+i} = \frac{3+4i}{7+i} = \frac{(3+4i)(7-i)}{49+1} = \frac{21+4+(28-3)i}{50} = \frac{25+25i}{50} = \frac{1}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}$$

donc c'est un nombre d'argument $\frac{\pi}{4}$. Mais de même si on écrit $2+i = r_1 e^{i\theta_1}$ avec $\theta_1 = \arctan(\frac{1}{2})$ et $7+i = r_2 e^{i\theta_2}$ avec $\theta_2 = \arctan(\frac{1}{7})$ alors c'est aussi

$$\frac{(r_1 e^{i\theta_1})^2}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1^2 e^{2i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(2\theta_1-\theta_2)}$$

donc un argument s'exprime aussi comme $2\arctan(\frac{1}{2}) - \arctan(\frac{1}{7})$. Ici pour majorer : d'une part

$$-\frac{1}{7} \leqslant -\arctan\left(\frac{1}{7}\right) \leqslant 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

et d'autre part

$$2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right) \leqslant 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

donc ce nombre est dans $]-1,1[$ et la différence avec $\frac{\pi}{4}$ est dans $]-2,2[$ mais cela suffit encore à montrer l'égalité

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

□

Second problème

Le but de ce problème est de résoudre l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E_1) \quad \bar{z} = z^2 - 3z + 7 \tag{9}$$

1. (a) Montrer que (E_1) n'admet pas de solutions réelles.

   Correction. Si z est réel alors $\bar{z} = z$ et donc l'équation (E_1) est équivalente à $z^2 - 4z + 7 = 0$. Ici $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 7 = 16 - 28 = -12 < 0$: il n'y a pas de solutions réelles. □

   (b) (E_1) admet-elle des solutions imaginaires pures ?

   Correction. On cherche une solution sous forme $z = yi$ avec $y \in \mathbb{R}$. En remplaçant, si z est solution alors on doit avoir $-yi = (yi)^2 - 3yi + 7$ c'est à dire $-yi = -y^2 + 7 - 3yi$. Par unicité des parties réelles et imaginaires ceci implique les deux équations

   $$\begin{cases} 0 = -y^2 + 7 & (L_1) \\ -y = -3y & (L_2) \end{cases}$$

   d'où on conclut facilement (de multiples façons) qu'il n'y a pas de solution (par exemple (L_2) implique $y = 0$, qui n'est pas solution de (L_1)).
   Remarque (complément) : z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$ et dans ce cas (E_1) est équivalente à $z^2 - 2z + 7$. Mais les relations sur la somme et le produit des racines implique que si l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$) admet deux solutions imaginaires pures conjuguées alors $b = 0$ (et réciproquement, si $b = 0$ elles sont opposées, donc soit $\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ soit $\pm i\sqrt{\frac{c}{a}}$). □

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est solution de (E_1) si et seulement si $\bar{z}$ aussi.

   Correction. On conjugue tout ! Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

   $$\begin{aligned} (E_1) &\iff \bar{\bar{z}} = \overline{z^2 - 3z + 7} \\ &\iff \bar{\bar{z}} = \overline{z^2 - 3z + 7} \\ &\iff \bar{\bar{z}} = \overline{z^2} - \overline{3z} + \overline{7} \\ &\iff \bar{\bar{z}} = (\bar{z})^2 - 3\bar{z} + 7 \end{aligned}$$

   (on peut tout aussi bien rédiger en partant « du bas vers le haut ») et ceci démontre que z est solution de (E_1) si et seulement si $\bar{z}$ est solution de la même équation (E_1). □

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E_1). Montrer qu'alors z est solution de l'équation suivante :

   $$(E_2) \quad z = z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 33z + 35 \tag{10}$$

   Correction. Résumons soigneusement : supposons z solution de (E_1). Alors $\bar{z}$ est aussi solution de (E_1). La dernière ligne précédente nous dit que $z = (\bar{z})^2 - 3\bar{z} + 7$. Là-dedans on ré-injecte à droite en remplaçant $\bar{z}$ par $z^2 - 3z + 7$. On obtient

   $$z = (z^2 - 3z + 7)^2 - 3(z^2 - 3z + 7) + 7$$

   qui se développe en

   $$z = (z^4 + 9z^2 + 49 - 6z^3 + 14z^2 - 42z) + (-3z^2 + 9z - 21) + 7$$

   et en regroupant c'est bien (E_2). □

4. (a) Vérifier que $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$ est solution de (E_2). Qu'en est-il de $z_2 = \bar{z}_1$?

   Correction. Pour z_1 on remplace. On trouve successivement

   $$z_1^2 = 4 - 3 + 2 \times 2i\sqrt{3} = 1 + 4i\sqrt{3}$$

   puis

   $$z_1^3 = (2 + i\sqrt{3})(1 + 4i\sqrt{3}) = 2 - 4 \times 3 + (1 + 2 \times 4)i\sqrt{3} = -10 + 9i\sqrt{3}$$

   puis

   $$z_1^4 = (2 + i\sqrt{3})(-10 + 9i\sqrt{3}) = -20 - 9 \times 3 + (-10 + 18)i\sqrt{3} = -47 + 8i\sqrt{3}$$

alors

$$\begin{aligned} &z_1^4 - 6z_1^3 + 20z_1^2 - 33z_1 + 35 \\ &\quad = (-47 + 8i\sqrt{3}) - 6(-10 + 9i\sqrt{3}) + 20(1 + 4i\sqrt{3}) - 33(2 + i\sqrt{3}) + 35 \\ &\quad = (-47 + 60 + 20 - 66 + 35) + (8 - 54 + 80 - 33)i\sqrt{3} \end{aligned}$$

qui est bien égal à $2 + i\sqrt{3}$.
Quant à z_2 : à nouveau on conjugue partout !

$$\begin{aligned} (E_2) &\iff \bar{z} = \overline{z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 33z + 35} \\ &\iff \bar{z} = \overline{z^4} - \overline{6z^3} + \overline{20z^2} - \overline{33z} + \overline{35} \\ &\iff \bar{z} = \overline{z^4} - 6\overline{z^3} + 20\overline{z^2} - 33\bar{z} + 35 \\ &\iff \bar{z} = (\bar{z})^4 - 6(\bar{z})^3 + 20(\bar{z})^2 - 33\bar{z} + 35 \end{aligned}$$

qui montre que z_1 est solution de (E_2) si et seulement si $\bar{z}_1$ est solution de (E_2). Donc $\bar{z}_2$ est solution de (E_2) (sans refaire de calcul). □

(b) Déterminer une équation du second degré, notée (E_3), dont les solutions sont z_1 et z_2.

Correction. D'après la relation entre somme et produits des racines, il suffit de prendre l'équation

$$(z - z_1)(z - z_2) = 0$$

qui se développe en $z - (z_1 + z_2) + z_1 z_2 = 0$ (ici on peut tout aussi rapidement retrouver le résultat du cours). Avec $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 2 - i\sqrt{3}$ cela donne l'équation

$$(E3) \quad z^2 - 4z + 7$$

□

5. Donner deux constantes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 34z + 35 = (z^2 - 4z + 7)(z^2 + az + b) \tag{11}$$

Correction. À droite on retrouve le polynôme du second degré de l'équation (E_3) : c'est bon signe. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (le calcul qui suit est valable quelque soit (a, b)), on développe, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} &(z^2 - 4z + 7)(z^2 + az + b) \\ &\quad = z^4 + az^3 + bz^2 - 4z^3 - 4az^2 - 4bz + 7z^2 + 7az + 7b \\ &\quad = z^4 + (a - 4)z^3 + (b - 4a + 7)z^2 + (7a - 4b) + 7b \end{aligned}$$

Ceci est égal à $z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 34z + 35$ dès que :

$$\begin{cases} a - 4 = -6 & (L_1) \\ b - 4a + 7 = 20 & (L_2) \\ 7a - 4b = -34 & (L_3) \\ 7b = 35 & (L_4) \end{cases}$$

Alors (L_1) implique $a = -2$, L_4 implique $b = 5$, et ces valeurs satisfont bien (L_2) et (L_3) aussi. Conclusion : on peut bien donner ces valeurs à a et à b et on a démontré :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 34z + 35 = (z^2 - 4z + 7)(z^2 - 2z + 5)$$

□

6. Résoudre (E_2).

Correction. Bien sûr en passant le z de gauche à droite :

$$\begin{aligned} (E_2) &\iff z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 34z + 35 = 0 \\ &\iff (z^2 - 4z + 7)(z^2 - 2z + 5) = 0 \\ &\iff z^2 - 4z + 7 = 0 \text{ ou } z^2 - 2z + 5 = 0 \end{aligned}$$

On a déjà montré que la première de ces équations est (E_3). La deuxième qui apparait $z^2 - 2z + 5 = 0$ est encore un polynôme de degré 2 avec $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 = 4 - 20 = -16$ donc on pose $\delta = 4i$ tel que $\delta^2 = -16$ et ses deux solutions sont $z = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$.

Conclusion : les solutions de (E_2) sont exactement quatre nombres $2 + i\sqrt{3}$, $2 - i\sqrt{3}$, $1 + 2i$, $1 - 2i$ (les deux premiers s'appellent z_1 et z_2, on appelle z_3 et z_4 les deux derniers). $\square$

7. En déduire toutes les solutions de (E_1).

Correction. Il faut résumer calmement car avec la méthode utilisée on a montré que **si** z était solution de (E_1) **alors** z était solution de (E_2), donc était parmi les quatre nombres ci-dessus, mais on ne prétend pas que (E_1) est équivalente à (E_2). Il faut donc montrer que les quatres nombres ci-dessus sont solutions de (E_1). Et il faut le vérifier à la main, et seulement pour z_1 et z_3 car leur conjugués sont automatiquement solutions, de plus on a déjà $z_1^2 = 1 + 4i\sqrt{3}$. Alors :

$$z_1^2 - 3z_1 + 7 = (1 + 4i\sqrt{3}) - 3(2 + i\sqrt{3}) + 7 = 2 + i\sqrt{3} = \bar{z}_1$$

donc z_1 est solution de (E_1) (et donc z_2 aussi). De même avec z_3 et $z_3^2 = 1 - 4 + 4i = -3 + 4i$:

$$z_3^2 - 3z_3 + 7 = (-3 + 4i) - 3(1 + 2i) + 7 = 1 - 2i = \bar{z}_3$$

donc z_3 est solution de (E_1) (et donc z_4 aussi).

Conclusion : z_1, z_2, z_3, z_4 sont exactement les quatre solutions de (E_1). $\square$