DS 2 Mathématiques

Durée : 3 heures. Calculatrices et documents non autorisés.
Les exercices et les problèmes peuvent être traités indépendamment. Dans les exercices les questions sont indépendantes. Dans les problèmes, même s'il est toujours possible de sauter une question, il est bon de prêter attention à la progression des questions et à la structure globale du problème, et de vérifier que les calculs sont corrects avant de passer à la suite.
*Il faut avant tout **bien** faire ce qui est fait.*

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) \quad |z - 5i| = |\bar{z} - 3 + 4i| \qquad\qquad (F) \quad \frac{z^2+9}{z-5} = 4$$

Exercice 2. 1. (a) Simplifier $\sqrt{3}\cos(x) - 3\sin(x)$ (avec $x \in \mathbb{R}$) sous forme $r\cos(x+\varphi)$, $r \geqslant 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$.
   (b) Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos(x) - 3\sin(x) = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. (a) Retrouver la formule pour $\cos(\alpha) - \cos(\beta)$ (avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$).
   (b) Résoudre l'équation $\cos(21\theta) = \cos(15\theta)$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.
3. (a) Rappeler l'identité remarquable $(a+b)^3$ (avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$).
   (b) Linéariser $\sin^3(\theta)$ puis $\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$).

Exercice 3. Le but est de démontrer les deux formules suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{1}$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) \neq 0$.
2. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = \frac{\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))} \tag{2}$$
3. Conclure soigneusement.

Premier problème

Le but de ce problème est de présenter une méthode pour obtenir et vérifier des formules « de type Machin ».
On admet qu'on sait au moins que $3 < \pi < 4$.

1. Soit un entier $n \geqslant 1$. Écrire le nombre complexe $n + i$ sous forme exponentielle. On exprimera à l'aide de la fonction arctangente son unique argument dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.
2. Simplifier le nombre complexe $z = (2+i)(3+i)$.
3. En exprimant son argument de deux façons différentes, démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que
$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \tag{3}$$
4. On admet l'inégalité suivante :
$$\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}[, \quad \tan(x) \geqslant x \tag{4}$$
Démontrer qu'alors
$$\forall y \in [0, +\infty[, \quad \arctan(y) \leqslant y \tag{5}$$
5. En déduire la formule
$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \tag{6}$$
6. Reprendre la même méthode avec $z = (2+i)(5+i)(8+i)$ et en déduire la formule
$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \tag{7}$$
7. Reprendre les calculs avec les nombres $(3+i)^2(7+i)$ ainsi que $\frac{(2+i)^2}{7+i}$. Quelles formules de type Machin obtient-on ?

Second problème

Le but de ce problème est de résoudre l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E_1) \quad \bar{z} = z^2 - 3z + 7 \tag{8}$$

1. (a) Montrer que (E_1) n'admet pas de solutions réelles.
   (b) (E_1) admet-elle des solutions imaginaires pures ?
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est solution de (E_1) si et seulement si $\bar{z}$ aussi.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E_1). Montrer qu'alors z est solution de l'équation suivante :

$$(E_2) \quad z = z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 33z + 35 \tag{9}$$

4. (a) Vérifier que $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$ est solution de (E_2). Qu'en est-il de $z_2 = \bar{z}_1$?
   (b) Déterminer une équation du second degré, notée (E_3), dont les solutions sont z_1 et z_2.
5. Donner deux constantes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 34z + 35 = (z^2 - 4z + 7)(z^2 + az + b) \tag{10}$$

6. Résoudre (E_2).
7. En déduire toutes les solutions de (E_1).