DS 2 Mathématiques

Les exercices et problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre voulu. Dans les exercices, les questions sont indépendantes entre elles. Dans les problèmes par contre, même s'il est toujours possible de sauter une question, il est nécessaire de prêter attention à la progression logique et à la dépendance entre questions. Il est conseillé de prendre son temps pour comprendre la structure globale du problème. Le but n'est pas de tout faire ***mais de le faire bien****.*

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$(E_1) \quad 2e^{2x} - e^x < 3 \qquad (E_2) \quad \frac{2x^2-5x-7}{x^2-2x-8} \leqslant 1 \tag{1}$$

$$(E_3) \quad \lfloor \sqrt{x^2+7} \rfloor = 3 \qquad (E_4) \quad |2x+3| \leqslant 3x+4 \tag{2}$$

Exercice 2

Soit l'équation (F) : $z^4 - 2z^3 - 4z^2 + 14z - 5 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Vérifier que $u = 2 + i$ est solution de (F).
2. Justifier que $\overline{u}$ est aussi solution de (F), puis donner un polynôme de degré 2, P, à coefficients réels dont u et $\overline{u}$ sont exactement les deux solutions.
3. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^4 - 2z^3 - 4z^2 + 14z - 5 = P(z) \times (az^2 + bz + c)$.
4. En déduire toutes les solutions de (F).

Exercice 3

1. Résoudre l'équation $\sin(7\theta) = \sin(3\theta)$, d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.
2. Linéariser $\sin(5\theta)\cos^2(3\theta)$.
3. (a) Simplifier l'expression $\cos(\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\theta)$ sous forme $r\cos(\theta + \varphi)$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire toutes les solutions de l'équation (G) : $\cos(\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\theta) = \frac{1}{2}$, d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que (on pourra utiliser sans la justifier l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\arctan(x) \leqslant x$).

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \tag{3}$$

Problème 1

On considère les deux nombres réels suivants :

$$\mu = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \nu = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} \tag{4}$$

Le but est de donner une expression simplifiée de μ et de ν.

1. (a) Calculer $\mu^3 + \nu^3$ ainsi que $\mu\nu$.
   (b) Développer $(\mu + \nu)^3$, et l'exprimer en fonction de $\mu + \nu$ seulement.
2. On pose $\lambda = \mu + \nu$ et $P : x \mapsto x^3 + 3x - 14$.
   (a) Déduire des questions précédentes que $P(\lambda) = 0$.
   (b) Vérifier que $P(2) = 0$ puis déterminer trois réels $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c) \tag{5}$$

(c) En déduire toutes les solutions réelles de l'équation $P(x) = 0$.

(d) En déduire la valeur de $\mu + \nu$.

3. À l'aide des résultats précédents, montrer que μ et ν sont les deux solutions de $x^2 - 2x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. Conclure en donnant des expressions simplifiées pour μ et pour ν, qui ne font pas intervenir de racine cubique.

Problème 2

Le but est de démontrer l'identité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan(x) \tag{6}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in \,]-1, 1[$.
2. Réciproquement, montrer que pour tout $y \in \,]-1, 1[$ il existe bien un $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, et exprimer x en fonction de y.
3. Soit $\theta \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Justifier que $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}$.
4. Conclure très soigneusement.

Problème 3

On souhaite étudier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E_n) \qquad nz^n = z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z + 1$$

1. Écrire les équations (E_1) et (E_2), et les résoudre.
2. Trouver un nombre $u \in \mathbb{C}$ qui est solution de (E_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. (a) Montrer que l'équation (E_3) est équivalente à

$$(z-u)(az^2 + bz + c) = 0 \tag{7}$$

pour un certain $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer.

(b) Donner toutes les solutions de l'équation (E_3).

(c) Montrer que les solutions différentes de u ont un module strictement inférieur à 1.

4. (a) Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n, \quad |w_1 + \cdots + w_n| \leqslant |w_1| + \cdots + |w_n| \tag{8}$$

(b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$ alors $|1 + z + \cdots + z^{n-1}| < n|z|^n$.

(c) En déduire que l'équation (E_n) n'a pas de solutions $z \in \mathbb{C}$ telles que $|z| > 1$.