DS 3 Mathématiques
Sujet B

Problème

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles, indexées à partir de 0, on définit une nouvelle suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \tag{1}$$

On appelle $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le **produit de convolution** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si dans la formule ci-desus on prend $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n$, on parle simplement du produit de convolution de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec elle-même.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) \tag{2}$$

   (b) On considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n = n$. Calculer le produit de convolution de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec elle-même.

2. Soit un nombre $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = a^n$. Calculer le produit de convolution de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec elle-même.

3. Soit un autre nombre $b \in \mathbb{R}$, de même on considère la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = b^n$. Montrer que le produit de convolution de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \begin{cases} (n+1)a^n & \text{si } a = b \\ \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b \end{cases} \tag{3}$$

4. On définit la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4}$$

   Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le produit de convolution de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n$.

5. Pour deux nombres $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, on définit les suites $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = \frac{c^n}{n!} \quad \delta_n = \frac{d^n}{n!} \tag{5}$$

   Montrer que, pour leur produit de convolution $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{(c+d)^n}{n!} \tag{6}$$

6. **[Informatique]** On souhaite écrire un programme Python permettant de vérifier une partie des calculs précédents. On note plutôt avec $i \in \mathbb{N}$ l'*indice* des suites (ce n'est qu'une variable muette) et pour un nombre n donné, on représente une suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par une liste `L` contenant les $n+1$ premiers termes de la suite, c'est à dire les termes u_0, u_1, …, u_n. Ainsi `L[i]` est exactement le terme u_i et cela pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$. Par exemple si $n = 5$ alors la suite $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est représentée par la liste `[0, 1, 2, 3, 4, 5]` et la suite $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est représentée par `[1, 0, 0, 0, 0, 0]`.
   (a) Écrire une fonction `epsilon(n)` qui prend en argument un nombre `n` et qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de la question 4.
   (b) Écrire une fonction `e(n)` qui prend en argument un nombre `n` et qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de la question 1b.
   (c) On considère la fonction suivante, prenant deux arguments (des nombres) `c` et `n` :

```
def manquedeserieux(c, n):
    L = [0] * n
    L[0] = c
    for i in range(1, n):
        L[i] = L[i-1] * c / (i+1)
    return L
```

      i. Si on suppose que la variable `c` est un nombre, que renvoie `manquedeserieux(c, 2)` ? Et `manquedeserieux(c, 3)` ?
      ii. Corriger la fonction pour écrire une fonction `gamma(c, n)` qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question 5 avec le paramètre c.
   (d) Écrire une fonction `convole(L, M, n)`, qui prend en argument un entier `n` et deux listes `L`, `M` de taille (au moins) $n+1$ et qui renvoie le terme w_n du produit de convolution $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction `convolution(L, M, n)` qui prend en argument deux listes `L`, `M` représentant les $n+1$ premiers termes de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et qui renvoie une liste représentant les $n+1$ premiers termes de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est leur produit de convolution.
7. On souhaite montrer que le produit de convolution est commutatif. Pour cela on fixe des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ leur produit de convolution. De même on note $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le produit de convolution de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = w'_n$.
8. On souhaite montrer que le produit de convolution est associatif. Pour cela on fixe trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'une part on forme le produit de convolution $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le produit de convolution de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'autre part, on forme d'abord le produit de convolution $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(z_n)_{n_i n\mathbb{N}}$, puis on forme le produit de convolution $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = w'_n$.
9. Le produit de convolution admet-il un élément neutre ?