DS 3 Mathématiques
Correction

Exercice 1

1. D'abord
$$A_n = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n\\ k \text{ pair}}} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor^2 + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n\\ k \text{ impair}}} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor^2 \tag{1}$$
Dans la somme de gauche on pose $k = 2j$: la valeur minimale est $k = 2$ correspondant à $j = 1$ et la valeur maximale est $k = 2n$ correspondant à $j = n$.
Dans la somme de droite on pose $k = 2j + 1$: la valeur minimale est $k = 1$ correspondant à $j = 0$, et la valeur maximale est $k = 2n - 1$ atteinte pour $j = n - 1$.
Ainsi
$$A_n = \sum_{j=1}^{n} \left\lfloor \frac{2j+1}{2} \right\rfloor^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{2j+2}{2} \right\rfloor^2 \tag{2}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left\lfloor j + \frac{1}{2} \right\rfloor^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \lfloor j+1 \rfloor^2 \tag{3}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^2 \tag{4}$$
À ce stade on sait qu'on va pouvoir calculer la somme ; un changement d'indice $i = j + 1$ à droite montre qu'en fait la somme de droite est égale à la somme de gauche… Sinon naïvement :
$$A = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \sum_{j=0}^{n-1} \Big(j^2 + 2j + 1\Big) \tag{5}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \sum_{j=0}^{n-1} j^2 + 2\sum_{j=0}^{n-1} j + n \tag{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1} j + n \tag{7}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 2 \times \frac{(n-1)n}{2} + n \tag{8}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n(n-1) + n \tag{9}$$
On peut alors tout factoriser par n, ou mieux par $\frac{n}{6}$:
$$A = \frac{n}{6}\Big((n+1)(2n+1) + (n-1)(2n-1) + 6(n-1) + 6\Big) \tag{10}$$
$$= \frac{n}{6}\Big(2n^2 + 3n + 1 + 2n^2 - 3n + 1 + 6n - 6 + 6\Big) \tag{11}$$
$$= \frac{n}{6}\Big(4n^2 + 6n + 2\Big) \tag{12}$$
$$= \frac{n}{3}\Big(2n^2 + 3n + 1\Big) \tag{13}$$
$$= \boxed{\frac{n}{3} \times (n+1)(2n+1) = A_n} \tag{14}$$
C'est en fait bien deux fois $\sum_{j=1}^{n} j^2$ …

2. Calculons très naïvement. Pour B_n on choisit un ordre de sommation, peu importe.

$$B_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(j-i)\right) \tag{15}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) - ni\right) \tag{16}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} - ni\right) \tag{17}$$
$$= n \times \frac{n(n+1)}{2} - n\sum_{i=1}^{n} i \tag{18}$$
$$= n \times \frac{n(n+1)}{2} - n \times \frac{n(n+1)}{2} \tag{19}$$
$$= \boxed{0 = B_n} \tag{20}$$

Ce n'est en fait pas surprenant : i et j jouant des rôles symétriques, à chaque terme $j-i$ de la somme correspond aussi un terme $i-j$, et la somme des deux s'annule.

Pour C_n, on choisit un ordre de sommation mais l'un est tout de même plus facile pour faire apparaitre à l'intérieur une somme partant de 1 :

$$C_n = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(j-i)\right) \tag{21}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left(j \times j - \sum_{i=1}^{j} i\right) \tag{22}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left(j^2 - \frac{j(j+1)}{2}\right) \tag{23}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\Big(2j^2 - (j(j+1))\Big)\right) \tag{24}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\Big(j^2 - j)\Big)\Big) \tag{25}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j\right) \tag{26}$$
$$\tag{27}$$

À ce stade on sait qu'on peut calculer la somme. On a alors

$$C_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) \tag{28}$$
$$= \frac{n(n+1)}{12}\Big((2n+1) - 3\Big) \tag{29}$$
$$= \frac{n(n+1)}{12} \times (2n-2) \tag{30}$$
$$= \boxed{\frac{n(n+1)(n-1)}{6} = C_n} \tag{31}$$

3. D'abord par les propriétés de l'exponentielle (écrivons $\exp(x)$ à la place de e^x pour plus de clarté)

$$D_n = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k 3^{k+1}\right) \tag{32}$$

On veut utiliser la formule de la somme des termes successifs d'une suite géométrique pour les $(-3)^k$, ce qui nécessite d'écrire $(-1)^k 3^{k+1} = 3 \times (-3)^k$. Il faut alors faire apparaitre le terme manquant pour $k = 0$.

$$D_n = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} 3 \times (-3)^k\right) \tag{33}$$

$$= \exp\left(3\sum_{k=1}^{n} (-3)^k\right) \tag{34}$$

$$= \exp\left(3\left(\sum_{k=0}^{n} (-3)^k - 1\right)\right) \tag{35}$$

$$= \exp\left(3 \times \left(\frac{1-(-3)^{n+1}}{1-(-3)} - 1\right)\right) \tag{36}$$

$$= \boxed{\exp\left(\frac{3}{4}(1-(-3)^{n+1}) - 3\right) = D_n} \tag{37}$$

Exercice 2

1. On calcule directement $\boxed{a_1 = 1}$, $\boxed{b_1 = 1}$ puis $\boxed{a_2 = 2}$, $\boxed{b_2 = 3}$.
2. **(Informatique)** On utilise deux variables `a`, `b`, qui représentent chacune une des suites, et à la fin on renvoie la liste `[a, b]`.

```
def suites(n):
    a = 0
    b = 0
    for k in range(n):
        t = -a + 2*b + 1
        b = -4*a + 5*b + 2**k
        a = t
    return [a, b]
```

Dans la boucle, on ne peut pas écrire en une seule ligne

```
        a = -a + 2*b + 1
        b = -4*a + 5*b + 2**k
```

car on tombe sur le même problème que pour l'échange de deux variables, ou pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : après la première ligne, `a` ne représente plus a_k mais a_{k+1}, et donc la deuxième ligne ne correspond pas à ce qu'on veut. Il faut donc passer par une variable intermédiaire.

3. On part de la relation de récurrence pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qu'on fait « avancer de 1 » (remplacer n par $n+1$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -a_{n+1} + 2b_{n+1} + 1 \tag{38}$$

On voit alors apparaitre une relation entre a_{n+2} et a_{n+1}, et on remplace b_{n+1} par sa relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -a_{n+1} + 2(-4a_n + 5b_n + 2^n) + 1 \tag{39}$$

$$= -a_{n+1} - 8a_n + 10b_n + 2^{n+1} + 1 \tag{40}$$

Ensuite on remplace b_n à l'aide de la relation de récurrence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$b_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n - 1) \tag{41}$$

ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -a_{n+1} - 8a_n + 10 \times \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n - 1) + 2^{n+1} + 1 \tag{42}$$

$$= -a_{n+1} - 8a_n + 5(a_{n+1} + a_n - 1) + 2^{n+1} + 1 \tag{43}$$

$$= -a_{n+1} - 8a_n + 5a_{n+1} + 5a_n - 5 + 2^{n+1} + 1 \tag{44}$$

$$= \boxed{4a_{n+1} - 3a_n + 2^{n+1} - 4 = a_{n+2}} \tag{45}$$

4. **(Informatique)** Standard, on a tout. On préfère ré-écrire la relation de récurrence sous forme $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 2^{n-1} - 4$.

```
def liste_a(n):
    L = [0] * n
    L[0] = 0
    L[1] = 1
    for k in range(2, n):
        L[k] = 4*L[k-1] - 3*L[k-2] - 2**(k-1) - 4
    return L
```

5. On raisonne proprement par analyse-synthèse.
Analyse : on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, la condition que $(\alpha 2^n + \beta n + \gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(*)$ signifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\alpha 2^{n+2} + \beta(n+2) + \gamma) = 4(\alpha 2^{n+1} + \beta(n+1) + \gamma) - 3(\alpha 2^n + \beta n + \gamma) + 2^{n+1} - 4 \tag{46}$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha 2^{n+2} + \beta n + 2\beta + \gamma = \alpha 2^{n+3} + 4\beta n + 4\beta + 4\gamma - 3\alpha 2^n - 3\beta n - 3\gamma + 2^{n+1} - 4 \tag{47}$$

Écrivons tout en terme de coefficients devant 2^n, n, et coefficients constants, cela signifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4\alpha 2^n + \beta n + (2\beta + \gamma) = (8\alpha - 3\alpha + 2)2^n + (4\beta - 3\beta)n + (4\beta + 4\gamma - 3\gamma - 4) \tag{48}$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4\alpha 2^n + \beta n + (2\beta + \gamma) = (5\alpha + 2)2^n + \beta n + (4\beta + \gamma - 4) \tag{49}$$

Cette égalité est vérifiée pour tout n si on choisit (α, β, γ) tels que

$$\boxed{\begin{cases} 4\alpha = 5\alpha + 2 \\ \beta = \beta \\ 2\beta + \gamma = 4\beta + \gamma - 4 \end{cases}} \tag{50}$$

De ces équations on tire $\alpha = -2$, puis (avec la ligne 3) $\beta = 2$ et γ peut être quelconque, on prend $\gamma = 0$.
Synthèse : posons $\boxed{\alpha = 2,\ \beta = -2,\ \gamma = 0}$. Les calculs ci-dessus montrent bien que la suite des $(\alpha 2^n + \beta n + \gamma)_{n\in\mathbb{N}} = (-2^{n+1} + 2n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $(*)$.

6. Il s'agit de la même méthode que pour les suites arithmético-géométriques. Posons $p_n = -2^{n+1} + 2n$ et écrivons l'un en-dessous de l'autre

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n + 2^{n+1} - 4 \tag{51}$$
$$p_{n+2} = 4p_{n+1} - 3p_n + 2^{n+1} - 4 \tag{52}$$

Alors la différence de ces deux lignes donne directement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} - p_{n+2} = 4(a_{n+1} - p_{n+1}) - 3(a_n - p_n)} \tag{53}$$

Autrement dit en posant $c_n = a_n - p_n$ on a bien $c_{n+2} = 4c_{n+1} - 3c_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 comme d'habitude, avec l'équation caractéristique $q^2 = 4q - 3 \Leftrightarrow q^2 - 4q + 3 = 0$, ici $\Delta = 4^2 - 3 \times 4 = 16 - 12 = 4$, les deux racines sont 1, 3. On sait donc d'après le cours qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = A + B \times 3^n}$.

Or $c_n = a_n + 2^{n+1} - 2n$. On calcule donc $\boxed{c_0 = 2}$ et $\boxed{c_1 = 1 + 4 - 2 = 3}$. On cherche donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} (n = 0) & A + B = 2 \\ (n = 1) & A + 3B = 3 \end{cases} \tag{54}$$

Dans ce système on trouve alors (par exemple faire $L_2 - L_1$) $2B = 1$ donc $\boxed{B = \frac{1}{2}}$ puis $\boxed{A = \frac{3}{2}}$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{3}{2} + \frac{3^n}{2}} \tag{55}$$

Comme $a_n = c_n - 2^{n+1} + 2n$, on en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{3}{2} + \frac{3^n}{2} - 2^{n+1} + 2n} \tag{56}$$

8. On pourrait tout recommencer, ou aussi utiliser directement b_n en fonction de a_n : on a déjà vu

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n - 1) \tag{57}$$

qui donne, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2} + \frac{3^{n+1}}{2} - 2^{n+2} + 2(n+1)\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{3^n}{2} - 2^{n+1} + 2n\right) - 1\right) && (58)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2} + 2 + \frac{3}{2} - 1\right) + \frac{3^{n+1}}{2} + \frac{3^n}{2} - -2^{n+2} - 2^{n+1} + (2n + 2n)\right) && (59)\\
&= \frac{1}{2}\left(4 + 3^n\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) - 2^{n+1}(2+1) + 4n\right) && (60)\\
&= \frac{1}{2}\left(4 + 2 \times 3^n + 3 \times 2^{n+1} + 4n\right) && (61)\\
&= \boxed{2 + 3^n - 3 \times 2^n + 2n = b_n} && (62)\\
& && (63)
\end{aligned}$$

Problème 1

1. (a) On calcule $u_1 = \frac{4\times4}{4-2}$ soit $\boxed{u_1 = 8}$, puis $u_2 = \frac{4\times8}{8-2}$ donc $\boxed{u_2 = \frac{16}{3}}$. Enfin $u_3 = \frac{4\times\frac{16}{3}}{\frac{16}{3}-2} = \frac{4\times16}{16-6} = \frac{4\times8}{5}$ soit $\boxed{u_3 = \frac{32}{5}}$.

(b) **(Informatique)** Tout à fait standard.

```
def suite(n):
    u = 4
    for i in range(n):
        u = 4 * u / (u-2)
    return u
```

(c) On peut raisonner par analyse-synthèse.

Analyse : le but est de trouver $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = c + \dfrac{d}{u_n - 2}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} &= \frac{c(u_n - 2) + d}{u_n - 2} && (64)\\
&= \frac{cu_n + (d - 2c)}{u_n - 2} && (65)
\end{aligned}$$

Ceci est égal à $\frac{4u_n}{u_n-2}$ si on prend (c,d) tels que

$$\begin{cases} c = 4 \\ (d - 2c) = 0 \end{cases} \tag{66}$$

Ceci admet une unique solution.
Synthèse : on pose $\boxed{c = 4}$ et $\boxed{d = 8}$, et alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4 + \frac{8}{u_n - 2} \tag{67}$$

(d) À l'aide de l'expression ci-dessus, on démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \geqslant 4$ (et donc que la suite est bien définie, il n'y a jamais de division par zéro) :

- Pour $n = 0$ alors $u_0 \geqslant 4$,
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n \geqslant 4$. Alors $u_n - 2 \geqslant 2$, et le quotient $\frac{8}{u_n - 2} \geqslant 0$ et donc $4 + \frac{8}{u_n - 2} \geqslant 0$.

Conclusion : par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 4}$.

2. Ici $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$. On calcule avec la règle pour dériver un quotient

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \frac{4 \times (x-2) - 4x \times 1}{(x-2)^2} \tag{68}$$

$$= \boxed{-\frac{8}{(x-2)^2} < 0} \tag{69}$$

On en déduit donc le tableau de variations suivant, sans oublier la valeur interdite ni les limites :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	4	$\searrow$	‖	$\searrow$	4
		$-\infty$	‖	$+\infty$	

(70)

3. On calcule directement

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) - x = \frac{4x - x(x-2)}{x-2} = \frac{6x - x^2}{x-2} = \frac{x(6-x)}{x-2} \tag{71}$$

D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		2		6		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$6-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

(72)

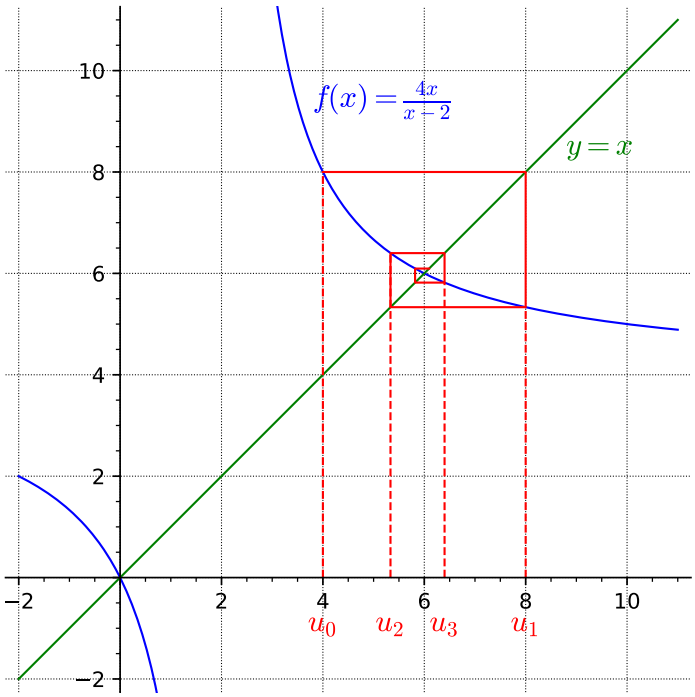
4. (a) On place soigneusement les informations obtenues sur sa copie, le tableau de signe aidant à placer l'un par rapport à l'autre la courbe de la fonction f et la droite $y = x$. On peut alors constuire les premiers termes de la suite, qu'on a d'ailleurs calculés à la question 1.(a).

(b) On observe un comportement « en escargot », ce qui signifie précisément que :

- La suite alterne de part et d'autre du point fixe $x = 6$,
- Les termes d'indice pair forment une suite croissante,
- Les termes d'indice impair forment une suite décroissante,
- La suite converge vers le point fixe.

(c) Démontrons par récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{4 \leqslant u_{2k} \leqslant u_{2k+2} \leqslant 6 \leqslant u_{2k+3} \leqslant u_{2k+1} \leqslant 8}_{\mathcal{P}(k)}$$



- Pour $k = 0$: on a déjà tout calculé $u_0 = 4$, $u_2 = \frac{16}{3}$ (c'est bien entre $4 = \frac{12}{3}$ et $6 = \frac{18}{3}$), et $u_1 = 8$, $u_3 = \frac{32}{5}$ (c'est bien entre $6 = \frac{30}{5}$ et $8 = \frac{40}{5}$). Tout est bien vrai pour $k = 0$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(k)$. La fonction f étant bien décroissante sur $[4, 8]$, on peut appliquer f sur toute l'inégalité et on obtient :

$$f(8) \leqslant f(u_{2k+1}) \leqslant f(u_{2k+3}) \leqslant f(6) \leqslant f(u_{2k+2}) \leqslant f(u_{2k}) \leqslant f(4) \tag{73}$$

À gauche, $f(8) = u_2 \geqslant 4$, et à droite $f(4) = u_1 = 8$, de plus $f(6) = 6$. Cette inégalité implique donc

$$4 \leqslant u_{2k+2} \leqslant u_{2k+4} \leqslant 6 \leqslant u_{2k+3} \leqslant u_{2k+1} \leqslant 8 \tag{74}$$

Mais appliquons encore f, même méthode, sur toute cette inégalité et on trouve

$$f(8) \leqslant f(u_{2k+1}) \leqslant f(u_{2k+3}) \leqslant f(6) \leqslant f(u_{2k+4}) \leqslant f(u_{2k+2}) \leqslant f(4) \tag{75}$$

d'où

$$4 \leqslant u_{2k+2} \leqslant u_{2k+4} \leqslant 6 \leqslant u_{2k+5} \leqslant u_{2k+3} \leqslant 8 \tag{76}$$

Ceci est précisément notre propriété $\mathcal{P}(k+1)$.

Conclusion : on a bien montré $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(k)}$.

5. **(Informatique)** En utilisant la fonction `suite` précédente : c'est une boucle `while` qui continue *tant que* $|u_{2k+1} - u_{2k}| \geqslant \varepsilon$. Quand elle termine, alors c'est qu'on est arrivé à $|u_{2k+1} - u_{2k}| < \varepsilon$. Ici on sait déjà que $u_{2k+1} \geqslant u_{2k}$ donc la valeur absolue n'est pas nécessaire ! On obtient le programme :

```
def seuil(epsilon):
    k = 0
    while suite(2*k+1) - suite(2*k) >= seuil:
        k = k + 1
    return k
```

On peut aussi éviter d'utiliser la fonction `suite` (qui fait à chaque passage dans la boucle recalculer la suite depuis le début !) en utilisant une variable qui représente u_{2k} et une autre qui représente u_{2k+1}, attention alors à l'étape de passage au rang suivant !

```python
def seuil(epsilon):
    # u représente u_(2k)
    # v représente u_(2k+1)
    u = 4
    v = 8
    k = 0
    while v - u >= seuil:
        k = k + 1
        # u doit devenir u_(2k+2) = f(v)
        # *puis* v doit devenir u_(2k+3) = f(u_(2k+2))
        u = 4*v / (v-2)
        v = 4*u / (u-2)
    return k
```

6. On calcule simplement :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n - 2}{4u_n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2u_n} \tag{77}$$
autrement dit
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{v_{n+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}v_n} \tag{78}$$
On reconnait là bien une suite arithmético-géométrique.

7. On applique la méthode. D'abord on cherche le point fixe c tel que $c = \frac{1}{4} - \frac{c}{2}$, soit $3c = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{c = \frac{1}{6}}$. On pose alors $w_n = v_n - \frac{1}{6}$, et sachant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} v_{n+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}v_n \\ c = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}c \end{cases} \tag{79}$$
on déduit $v_{n+1} - c = -\frac{1}{2}(v_n - c)$. Autrement dit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. On calcule de plus $w_0 = v_0 - \frac{1}{6} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{1}{12} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \tag{80}$$
On en déduit donc, comme $v_n = w_n + c$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{v_n = \frac{1}{12} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}} \tag{81}$$
et enfin, puisque $u_n = \frac{1}{v_n}$,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\frac{1}{12} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}} = \boxed{\frac{12}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2} = u_n} \tag{82}$$

8. Sur la formule précédente, on voit $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$. La limite de u_n est donc $\frac{12}{2} = 6$:
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 6} \tag{83}$$
C'est bien la « convergence vers le point fixe ».

Problème 2

1. **(Informatique)**

   (a) Déjà vu en TP. On peut poser des variables, comme si en mathématiques on écrivait $z = a + ib$ et $w = c + id$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on sait alors faire la somme de deux nombres complexes.

```
def somme(z, w):
    a = z[0]
    b = z[1]
    c = w[0]
    d = w[1]
    return [a+c, b+d]
```

   (b) Idem pour le produit, ré-écrivant au brouillon $(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

```
def produit(z, w):
    a = z[0]
    b = z[1]
    c = w[0]
    d = w[1]
    return [a*c - b*d, a*d + b*c]
```

   (c) Idem aussi avec $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. On a besoin d'importer, soit tout le module, ou bien seulement la fonction `sqrt` (les autres ne servent pas dans ce problème, c'est un « piège »).

```
from math import sqrt

def module(z):
    a = z[0]
    b = z[1]
    return sqrt(a**2 + b**2)
```

   (d) On sait faire sur le principe. Mais attention au type des objets manipulés ! D'abord il n'y a pas d'opération `+`, mais la fonction `somme`. Il n'y a pas de `/2`, mais la fonction `produit`, avec le nombre complexe `[1/2, 0]`. Et enfin attention à ce que $|z|$ est un nombre réel, il faut donc le transformer en nombre complexe avant de faire la somme ! Ceci étant dit, le programme est court.

```
def suite(n, z0):
    z = z0
    for k in range(n):
        z = produit([1/2, 0], somme(z, [module(z), 0]))
    return z
```

2. (a) Si $z_0 = 0$ alors on voit directement que la suite est nulle. On peut (éventuellement ; ici c'est assez évident) démontrer par récurrence la propriété $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = 0$:

   - C'est vrai pour $n = 0$,
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $z_n = 0$. Alors $z_{n+1} = \frac{0+0}{2} = 0$.

   Donc par récurrence on a bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = 0}$.

   (b) Cette fois il faut vraiment rédiger la récurrence. On suppose $z_0 \in [0, +\infty[$, démontrons $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = z_0$:

   - C'est vrai pour $n = 0$,
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $z_n = z_0 \in [0, +\infty[$. Alors $|z_n| = \sqrt{\mathfrak{Re}(z_0)^2} = z_0$, et donc $z_{n+1} = \frac{z_0+z_0}{2}$ donc $z_{n+1} = z_0$.

   En conclusion $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = z_0}$.

   (c) Si z_0 est un nombre réel négatif, alors $|z_0| = -z_0$ et dans ce cas $z_1 = 0$. Mais alors, comme à la question précédente, on en déduit $z_n = 0$ valable pour tout $n \geqslant 1$.

   Conclusion : dans ce cas $\boxed{\text{la suite } (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est nulle à partir du rang } n = 1}$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, et donc $z_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}) + \frac{i}{2}y_n$. Ré-écrit comme un système de deux suites récurrentes couplées :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}y_n \end{cases}} \tag{84}$$

(b) En particulier $\boxed{\text{la suite } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2}}$. On en déduit alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \frac{1}{2^n}y_0} \quad \text{où} \quad y_0 = \mathfrak{Im}(z_0) \tag{85}$$

(c) Avec la formule ci-dessus il apparait bien que si $\boxed{y_0 \neq 0 \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N},\ y_n \neq 0}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors sous forme exponentielle

$$z_{n+1} = \frac{r_n e^{i\theta_n} + r_n}{2} = \frac{r_n}{2} \times (e^{i\theta_n} + 1) \tag{86}$$

C'est le moment tant attendu d'utiliser la $\boxed{\text{formule de l'angle moitié}}$:

$$z_{n+1} = \frac{r_n}{2} \times e^{i\theta_n/2}\left(e^{i\theta_n/2} + e^{i\theta_n/2}\right) \tag{87}$$

$$= \frac{r_n}{2} \times e^{i\theta_n/2} \times 2\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \tag{88}$$

$$= \boxed{r_n \times e^{i\theta_n/2} \times \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = z_{n+1}} \tag{89}$$

et ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Démontrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $z_n = re^{i\theta/2^n} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$ ».

- Remarque : si on accepte que $\prod_{k=1}^{0} = 1$ toujours, alors on pourrait en fait commencer la récurrence à $n = 0$.
- Initialisation : pour $n = 1$ alors on calcule $z_1 = re^{i\theta/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ d'une part, et d'autre part le produit ci-dessus a un seul terme correspondant à $k = 1$, et c'est bien la même chose.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Alors

$$z_{n+1} = r_n \times e^{i\theta_n/2} \times \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \tag{90}$$

mais c'est aussi $r_{n+1}e^{i\theta_{n+1}}$. Or par $\mathcal{P}(n)$ on a $r_n = r\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$ et $\theta_n = \frac{\theta}{2^n}$. On en déduit donc

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n \cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) \\ \theta_{n+1} = \dfrac{1}{2}\theta_n \end{cases} \quad \text{d'où par } \mathcal{P}(n) \quad \begin{cases} r_{n+1} = r\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \times \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \\ \boxed{\theta_{n+1} = \dfrac{\theta}{2^{n+1}}} \end{cases} \tag{91}$$

ce qui donne

$$r_{n+1} = r\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \times \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \boxed{r\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = r_{n+1}} \tag{92}$$

Ces deux derniers résultats démontrent $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)}$.

5. Démontrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$ ». Il s'agit en fait d'une certaine forme de téléscopage ; si on accepte qu'on produit vide donne toujours 1, alors on pourrait en fait commencer la récurrence à $n = 0$.
   - Initialisation : pour $n = 1$ il s'agit de démontrer
   $$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{93}$$
   Mais cela découle de la formule de duplication pour sin, appliquée sur l'angle $\frac{\theta}{2}$: $\sin(2 \times \theta/2) = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$. Remarquons que par les hypothèses faites, z_n n'est jamais réel et l'argument θ_n n'est jamais 0 ni π, on peut donc diviser par $2\sin(\theta/2)$ et on obtient bien $\boxed{\cos(\theta/2) = \frac{\sin(\theta)}{2\sin(\theta/2)}}$.
   - Il est instructif de traiter le cas $n = 2$, où on a $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\theta}{4}\right)$. Remplaçant le premier $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ par $\frac{\sin(\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ comme dans le cas $n = 1$, et de même $\cos\left(\frac{\theta}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)}$, on a
   $$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\theta}{4}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)} \tag{94}$$
   et on voit apparaitre une certaine forme de téléscopage du $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, il reste bien $\frac{\sin(\theta)}{4\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)}$.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$. On a alors
   $$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \times \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \tag{95}$$
   en utilisant tout de suite l'hypothèse de récurrence. Mais on remplace alors, par la formule de duplication pour le sinus appliquée à l'angle $\frac{\theta}{2^{n+1}}$, car $\frac{\theta}{2^n} = 2 \times \frac{\theta}{2^{n+1}}$:
   $$\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} \tag{96}$$
   et donc
   $$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} = \boxed{\frac{\sin(\theta)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}} \tag{97}$$
   Ceci démontre bien $\mathcal{P}(n+1)$.

   Conclusion : par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)}$.
6. On obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (ou en fait $n \in \mathbb{N}$)
   $$z_n = \frac{r\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} e^{i\theta/2^n} \tag{98}$$
   On a alors directement les modules et arguments :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} r_n = \dfrac{r\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \\ \theta_n = \dfrac{\theta}{2^n} \end{cases}} \tag{99}$$
7. (a) On en déduit directement
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \theta_n = 0} \tag{100}$$

(b) On peut écrire

$$r_n = \frac{r\sin(\theta)}{\theta} \times \frac{1}{\frac{\sin(\frac{\theta}{2^n})}{\frac{\theta}{2^n}}} \tag{101}$$

Or pour $n \to +\infty$ alors $\frac{\theta}{2^n} \to 0$ et donc par la propriété qui a été admise (en remplaçant x par $\frac{\theta}{2^n}$)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\frac{\theta}{2^n}} = 1 \tag{102}$$

Ces calculs montrent donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{r\sin(\theta)}{\theta}} \tag{103}$$

Remarque : on peut en conclure que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *au sens complexe* vers le nombre réel $\frac{r\sin(\theta)}{\theta}$.

Problème 3

1. On trouve $\boxed{P_1(z) = 1}$, $\boxed{P_2(z) = 1 + 2z}$ et $\boxed{P_3(z) = 1 + 2z + 3z^2}$.
2. L'équation $P_1(z) = 0$ n'a pas de solutions donc $\boxed{S_1 = \emptyset}$.

   L'équation $P_2(z) = 0$ a pour unique solution $z = -\frac{1}{2}$ donc $\boxed{S_2 = \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$.

   Et $P_3(z) = 0$ est l'équation $3z^2 + 2z + 1 = 0$, polynôme de degré 2. Ici $\Delta = 2^2 - 4\times 3\times 1 = 4 - 12 = -8 = (2i\sqrt{2})^2$ et donc les solutions sont $z = \frac{-2\pm 2i\sqrt{2}}{2\times 3} = \frac{-1\pm i\sqrt{2}}{3}$. En conclusion

$$\boxed{S_3 = \left\{\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}, \frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right\}} \tag{104}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ alors $P_n(1) = \sum_{k=1}^n k = \boxed{\frac{n(n+1)}{2} = P_n(1)}$ directement.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(0) = 1 + 2z + \cdots$ et donc $\boxed{P_n(0) = 1}$. On peut écrire cela plus formellement en écrivant

$$P_n(z) = 1 + \sum_{k=2}^{n} kz^{k-1} = 1 + z\sum_{k=2}^{n} kz^{k-2} \tag{105}$$

   d'où on voit bien $P_n(0) = 1$ (en général il faut faire attention à ce que z^{k-1} pour $z = 0$ est égal à 0 seulement si $k \geqslant 2$ mais pas pour $k = 1$).

   On n'a donc jamais $P_n(0) = 0$ et donc $\boxed{0 \notin S_n}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe un élément $z \in S_n \cap S_{n+1}$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n+1} kz^{k-1} \tag{106}$$

   Or

$$\sum_{k=1}^{n+1} kz^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} + (n+1)z^n \tag{107}$$

   On en déduit donc $(n+1)z^n = 0$, donc $z^n = 0$ puis (car $n \geqslant 1$) $z = 0$. Or nous avons vu que $0 \notin S_n$ (et aussi $0 \notin S_{n+1}$). $\boxed{\text{Ceci est absurde}}$.

   En conclusion $\boxed{S_n \cap S_{n+1} = \emptyset}$.

6. Dans la somme proposée, sous la somme intérieure, le terme ne dépend pas de ℓ, donc il s'agit bien de $\sum_{k=1}^{n}(k\times z^{k-1})$. Mais sous la forme proposée on reconnait une somme double « triangulaire », qu'on peut ré-écrire en passant par une forme intermédiaire :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\ell=1}^{k}z^{k-1}\right)=\sum_{1\leqslant\ell\leqslant k\leqslant n}z^{k-1}=\sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=\ell}^{n}z^{k-1}\right) \tag{108}$$

Avec la formule pour la somme des termes successifs d'une suite géométrique (ou bien en rajoutant et retirant les termes manquants) on calcule, pour tout $1\leqslant\ell\leqslant n$ et si $z\neq 1$

$$\sum_{k=\ell}^{n}z^{k-1}=\sum_{k=\ell}^{n}z^{k-1}=\frac{1}{z}\sum_{k=\ell}^{n}z^{k}=\frac{1}{z}\times\frac{z^{\ell}-z^{n+1}}{1-z} \tag{109}$$

ce qui donne aussi $\frac{z^{\ell-1}-z^{n}}{1-z}$.
On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=\ell}^{n}z^{k-1}\right)&=\sum_{\ell=1}^{n}\frac{z^{\ell-1}-z^{n}}{1-z} &(110)\\ &=\frac{1}{1-z}\sum_{\ell=1}^{n}\left(z^{\ell-1}-z^{n}\right) &(111)\\ &=\frac{1}{1-z}\left(\sum_{\ell=1}^{n}z^{\ell-1}-nz^{n}\right) &(112)\\ &=\frac{1}{1-z}\left(\frac{1}{z}\sum_{\ell=1}^{n}z^{\ell}-nz^{n}\right) &(113)\\ &=\frac{1}{1-z}\left(\frac{1}{z}\times\frac{z-z^{n+1}}{1-z}-nz^{n}\right) &(114)\end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à simplifier ces termes et mettre au même dénominateur :

$$\begin{aligned}P_n(z)&=\frac{1}{1-z}\left(\frac{1-z^{n}}{1-z}-nz^{n}\right) &(115)\\ &=\frac{1-z^{n}-(1-z)nz^{n}}{(1-z)^{2}} &(116)\\ &=\boxed{\frac{1-(n+1)z^{n}+nz^{n+1}}{(1-z)^{2}}=P_n(z)} &(117)\end{aligned}$$

7. (a) Il s'agit d'un certain type de téléscopage (on peut l'écrire au brouillon avec des trois petits points) : pour tout $z\in\mathbb{C}$ alors

$$\begin{aligned}(z-1)P_n(z)&=z\sum_{k=1}^{n}kz^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}kz^{k-1} &(118)\\ &=\sum_{k=1}^{n}kz^{k}-\sum_{k=1}^{n}kz^{k-1} &(119)\end{aligned}$$

On pose alors $j=k-1$ dans la somme de droite, c'est-à-dire $k=j+1$: c'est alors bien une somme de

$j=0$ à $j=n-1$. Dans une deuxième étape on le renommera en k.

$$(z-1)P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} kz^k - \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)z^j \tag{120}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n-1} kz^k + nz^n\right) - \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)z^j\right) \tag{121}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} kz^k + nz^n - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)z^k \tag{122}$$

$$= nz^n - 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\Big(kz^k - (k+1)z^k\Big) \tag{123}$$

$$= \boxed{nz^n - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} z^k = (z-1)P_n(z)} \tag{124}$$

Remarque : avec la somme des termes successifs d'une suite géométrique, on peut donner une formule pour $(z-1)P_n(z)$, et donc ensuite pour $P_n(z)$.

(b) Supposant $P_n(z_0)=0$, la formule ci-dessus donne directement

$$0 = nz_0^n - \sum_{k=1}^{n-1} z_0^k - 1 \tag{125}$$

donc

$$nz_0^n = \sum_{k=1}^{n-1} z_0^k + 1 \tag{126}$$

Dans cette dernière somme, le 1 correspond aussi au terme qu'on obtiendrait avec $k=0$, donc on peut le faire rentrer dans la somme :

$$\boxed{nz_0^n = \sum_{k=0}^{n-1} z_0^k} \tag{127}$$

(c) Prenant le module des deux côtés et appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|nz_0^n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} z_0^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |z_0^k| \tag{128}$$

d'où

$$n|z_0|^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |z_0|^k \tag{129}$$

Or par l'hypothèse $|z_0|>1$ alors on a l'inégalité $|z_0|^n \geqslant |z_0|^k$ pour tout $0 \geqslant k \geqslant n$, et donc

$$n|z_0|^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |z_0|^n = n|z_0|^n \tag{130}$$

Il reste à justifier qu'il s'agit bien d'une inégalité stricte. Or l'inégalité $|z_0|^n \geqslant |z_0|^k$ est stricte dès que $k \geqslant 2$ (mais pas pour $k=0$ ni $k=1$).

Dans le cas $n \geqslant 2$ on a donc au moins un terme de l'inégalité qui est strict et donc $\boxed{n|z_0|^n < n|z_0|^n}$ dans ce cas. Ceci est absurde, et donc revenant aux hypothèses on en déduite $\boxed{\forall z \in S_n,\ |z| \leqslant 1}$.

Dans le cas $n=1$ alors $S_n = \emptyset$ et donc $\boxed{\text{c'est vrai aussi pour } n=1}$.