DS 4 Mathématiques
Correction

Exercice 1

- a est définie si et seulement si
  - $e^x - 3 > 0$, pour pouvoir calculer son ln,
  - et $\ln(e^x - 3) \neq 0$, pour pouvoir diviser.

  La première de ces conditions est équivalents à $e^x > 3$ soit $x > \ln(3)$. La deuxième est équivalente à $e^x - 3 \neq 1$ soit $e^x \neq 4$ c'est-à-dire $x \neq \ln(4)$.

  Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_a =]\ln(3), \ln(4)[\cup]\ln(4), +\infty[}$.
- b : la racine quatrième est définie seulement sur $[0, +\infty[$, tout comme la racine carrée (et toutes les racines d'exposant pair). Donc b est définie si et seulement si $16 - x^4 \geqslant 0$, soit $x^4 \geqslant 16$. Mais, encore une fois en ayant en tête le comportement de la fonction $x \mapsto x^4$ (exactement le même que $x \mapsto x^2$) ceci est équivalent à $-\sqrt[4]{16} \leqslant x \leqslant \sqrt[4]{16}$, et d'ailleurs $\sqrt[4]{16} = 2$ car $2^4 = 16$.

  Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_b = [-2, 2]}$.
- c est définie si et seulement si
  - $\arcsin(x)$ est défini,
  - et $\arcsin(x) \geqslant 0$.

  La première condition est $x \in [-1, 1]$ (le sinus étant à valeurs dans $[-1, 1]$, l'équation $\sin(x) = y$ ne peut pas avoir de solutions si $y \notin [-1, 1]$). Ensuite $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Mais la fonction arcsin est croissante, tout comme sin, et $\arcsin(0) = 0$ car $\sin(0) = 0$. Ainsi $\arcsin(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.

  Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_c = [0, 1]}$.
- d est définie si et seulement si
  - $\sqrt[3]{x}$ est défini ; mais $\mathcal{D}_{\sqrt[3]{\cdot}} = \mathbb{R}$, il n'y a pas de contraintes,
  - et $\arctan(\sqrt[3]{x})$ est défini, mais là encore $\mathcal{D}_{\arctan} = \mathbb{R}$, il n'y a donc pas de contraintes sur le numérateur,
  - et $\lfloor 3x^2 \rfloor \neq 0$.

  Pour cette dernière condition il est plus pratique de raisonner avec l'opposé : $\lfloor 3x^2 \rfloor = 0$ est équivalent à $0 \leqslant 3x^2 < 1$, ce qui est équivalent à (le carré étant toujours positif) $x^2 < \frac{1}{3}$ soit $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Donc d est définie en dehors ce cet intervalle.

  Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_d =]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[}$.

Exercice d'informatique

1. L'identité de $[\![n]\!]$ correspond à la liste `[0, 1, 2, ..., n-1]`. On peut la produire de plusieurs façons. Style suites récurrentes :

```python
def identité(n):
    F = [0] * n
    for i in range(n):
        F[i] = i
    return F
```

   Ou style `append` :

```python
def identité(n):
    F = []
    for i in range(n):
        F.append(i)
    return F
```

Ou, le plus pratique quand on a une formule directe pour `F[i]` est en fait d'utiliser les listes en compréhension :

```
def identité(n):
    F = [i for i in range(n)]
    return F
```

2. Il s'agit tout simplement de compter combien de fois y apparait dans la liste !

```
def nombre_antécédents(F, y):
    c = 0
    n = len(F)
    for i in range(n):
        if F[i] == y:
            c = c + 1
    return c
```

3. (a) Les idées générales sont correctes : étant donnée la liste `F` représentant une application $[\![n]\!] \to [\![p]\!]$, il s'agit de vérifier si tout élément de $[\![p]\!]$ apparait au plus une fois, c'est-à-dire a zéro ou un antécédent.

   Mais le problème est (toujours la même erreur d'élèves) lié au `return` dans la boucle, qui **arrête** la fonction. La boucle parcourt uns par uns tous les éléments y de $[\![p]\!]$, s'il y a zéro ou un antécédent cela ne signifie pas qu'il faut s'arrêter là mais il faut continuer à tester les autres éléments, par contre si la condition contraire est vérifiée (un élément avec au moins deux antécédents) alors on est certain que la fonction n'est pas injective et qu'on peut s'arrêter là. Le `return True` doit donc être placé à la fin et en dehors de la boucle : si on arrive jusque là, c'est qu'on ne s'est pas arrêté plus tôt, donc qu'on n'a pas rencontré d'élément avec au moins deux antécédents, donc qu'il y en a toujours au plus un.

   (b) La fonction corrigée est donc (sur sa copie, l'alignement des blocs d'instructions est **crucial**) :

```
def est_injective(F, p):
    for y in range(p):
        if nombre_antécédents(F, y) >= 2:
            return False
    return True
```

4. C'est tout simplement une liste `H` tel que pour $i \in [\![n]\!]$ (où n est la longueur de `F`) alors `H[i] = G[F[i]]`.

```
def compose(G, F):
    n = len(F)
    H = [0] * n
    for i in range(n):
        H[i] = G[F[i]]
    return H
```

   Là encore, la syntaxe en compréhension `H = [G[F[i]] for i in range(n)]` est en fait plus naturelle, pour une liste dont on connait une formule directe.

5. La version naïve : la bijection réciproque $g = f^{-1}$ correspond à une liste `G` où il faut mettre dans `G[y]` (pour tout $y \in [\![n]\!]$) l'unique antécédent de y par f. Comme celui-ci est supposé exister et être unique, on peut écrire cela dans une seule fonction, qui cherche à chaque fois l'antécédent de y (alternativement, il faudrait écrire une fonction séparée qui renvoie l'antécédent de y) :

```python
def inverse(F):
    n = len(F)
    G = [0] * n
    for y in range(n):
        # chercher l'antécédent
        for i in range(n):
            if F[i] == y:
                x = i
        # c'est bien x l'antécédent de y
        G[y] = x
    return H
```

Remarque : cela ne marche clairement pas si `F` ne représente pas une bijection (x n'est pas trouvé et la variable n'existe pas).
Après coup : c'est aussi la liste `G` tel que `G[F[x]] = x`, ce qu'on peut faire en itérant d'un seul coup sur x !

```python
def inverse(F):
    n = len(F)
    G = [0] * n
    for x in range(n):
        G[F[x]] = x
    return G
```

Ceci ne remplit pas les cases de `G` « dans l'ordre » mais, encore une fois si la liste `F` est bien bijective, cela les remplit toutes une et une seule fois.

6. Il s'agit de partir de la liste `F` et de créer une liste en « enlevant les doublons ». Il est plus pratique d'itérer sur les éléments de $[\![p]\!]$ et utiliser la fonction `nombre_antécédents` pour faire apparaitre directement ceux dans l'image. Dans tous les cas on forme l'image par `append` successifs.

```python
def image(F, p):
    I = []
    for y in range(p):
        if nombre_antécédents(F, y) >= 1:
            I.append(y)
    return I
```

Problème 1 : une petite promenade hyperbolique

Partie A

1. Vu en cours : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{th}(-x) = \dfrac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}$, qu'on multiplie en haut et en bas par e^{2x} ce qui donne $\text{th}(-x) = \dfrac{1-e^{2x}}{1+e^2}$, et on reconnait là $-\text{th}(x)$. En résumé $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{th}(-x) = -\text{th}(x)}$ ce qui signifie que la fonction th est impaire.
2. On a toujours $0 < e^{2x}$. Alors : d'une part $e^{2x} - 1 < e^{2x} + 1$, donc en divisant des deux côtés par $e^{2x} + 1 > 0$ on obtient $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} < 1$. On peut alors utiliser l'imparité pour l'autre côté : quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $\text{th}(-x) < 1$ soit $-\text{th}(x) < 1$ donc $\text{th}(x) > -1$ (ou alors on fait d'autres calculs, qui reviennent plus au moins à la preuve précédente de l'imparité). Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ -1 < \text{th}(x) < 1}$.
3. On dérive simplement comme un quotient : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{th}'(x) = \frac{(2e^{2x}) \times (e^{2x}+1) - (e^{2x}-1) \times (2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}$$
$$= \frac{2e^{4x} + 2e^{2x} - 2e^{4x} + 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \boxed{\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \text{th}'(x)} \quad (1)$$

Mais d'autre part, en regroupant au même dénominateur (mais sans le développer en bas ! le but est de le garder factorisé pour l'étude du signe)

$$\begin{aligned} 1-\mathrm{th}^2(x) = 1-\frac{(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2} &= \frac{(e^{2x}+1)^2-(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{(e^{4x}+2e^{2x}+1)-(e^{4x}-2e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2} = \boxed{\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = 1-\mathrm{th}^2(x)} \end{aligned} \tag{2}$$

On trouve bien au passage $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = 1-\mathrm{th}^2(x)}$.

Remarque : cela fait penser à $\tan'(x) = 1+\tan^2(x)$. Dans le monde hyperbolique, un certain nombre de formules faisant intervenir le sinus ou la tangente au carré s'obtiennent en changeant les signes…

4. (a) On voit avec l'expression qu'on a dérivé $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) > 0}$. La fonction th est donc strictement croissante. On a aussi besoin de connaitre ses limites.

En $-\infty$ il n'a pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1}$.

En $+\infty$, on a affaire à une forme indéterminée « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ». La méthode standard est d'écrire

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)} = \frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}} \tag{3}$$

et il apparait alors directement $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1}$.

Alternativement, c'est automatique par imparité, si la limite est -1 en $-\infty$ c'est nécessairement $+1$ en $+\infty$.

On a alors tout ce qu'il faut pour tracer le tableau de variations, rajoutons-y $\mathrm{th}(0) = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{th}'(x)$			$+$		
$\mathrm{th}(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

(4)

De plus par le théorème de la bijection, la fonction étant strictement croissante et continue et on a les limites, $\boxed{\text{th réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ vers }]-1,1[}$.

(b) Soit $y \in]-1,1[$, soit $x \in \mathbb{R}$. Alors l'équation $\mathrm{th}(x) = y$ est équivalente à

$$\begin{aligned} \mathrm{th}(x) = y &\iff \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y && (5)\\ &\iff e^{2x}-1 = y(e^{2x}+1) && (6)\\ &\iff e^{2x}-1 = ye^{2x}+y && (7)\\ &\iff e^{2x}(1-y) = 1+y && (8)\\ &\iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} && (9)\\ &\iff 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) && (10)\\ &\iff \boxed{x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)} && (11) \end{aligned}$$

Remarquons que la quantité $\frac{1+y}{1-y}$ est bien strictement positive si on prend $-1 < y < 1$ (c'est même un si et seulement si, ce qui re-démontre au passage que l'image de th est exactement $]-1,1[$) ce qui

justifie bien tous ces calculs, et l'équation $\text{th}(x) = y$ admet bien une unique solution $x \in \mathbb{R}$ quelque soit $y \in]-1, 1[$.
Conclusion : la fonction réciproque de th est

$$\boxed{\begin{aligned} \text{th}^{-1} :]-1,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \end{aligned}} \tag{12}$$

Remarque : cette fonction s'appelle *argument tangente hyperbolique*, notée Argth.

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors d'une part

$$\text{th}(x+y) = \frac{e^{2(x+y)} - 1}{e^{2(x+y)} + 1} = \frac{e^{2x+2y} - 1}{e^{2x+2y} + 1} \tag{13}$$

et d'autre part

$$\frac{\text{th}(x) + \text{th}(y)}{1 + \text{th}(x)\,\text{th}(y)} = \frac{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}}{1 + \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \times \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}} \tag{14}$$

Dans cette dernière expression, multiplions en haut et en bas par $(e^{2x}+1)(e^{2y}+1)$:

$$\frac{\text{th}(x) + \text{th}(y)}{1 + \text{th}(x)\,\text{th}(y)} = \frac{(e^{2x}-1)(e^{2y}+1) + (e^{2x}+1)(e^{2y}-1)}{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1) + (e^{2x}-1)(e^{2y}-1)} \tag{15}$$

puis développons, en utilisant directement la propriété de l'exponentielle :

$$\frac{\text{th}(x) + \text{th}(y)}{1 + \text{th}(x)\,\text{th}(y)} = \frac{(e^{2x+2y} + e^{2x} - e^{2y} - 1) + (e^{2x+2y} - e^{2x} + e^{2y} - 1)}{(e^{2x+2y} + e^{2x} + e^{2y} + 1) + (e^{2x+2y} - e^{2x} - e^{2y} + 1)} \tag{16}$$

Simplifions ce qui se simplifie et il reste :

$$\frac{\text{th}(x) + \text{th}(y)}{1 + \text{th}(x)\,\text{th}(y)} = \frac{2e^{2x+2y} - 2}{2e^{2x+2y} + 2} \tag{17}$$

ce qui en simplifiant par 2 donne bien

$$\boxed{\frac{\text{th}(x) + \text{th}(y)}{1 + \text{th}(x)\,\text{th}(y)} = \frac{e^{2x+2y} - 1}{e^{2x+2y} + 1} = \text{th}(x+y)} \tag{18}$$

Cela conclut.
Remarque : cela ressemble à $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$.

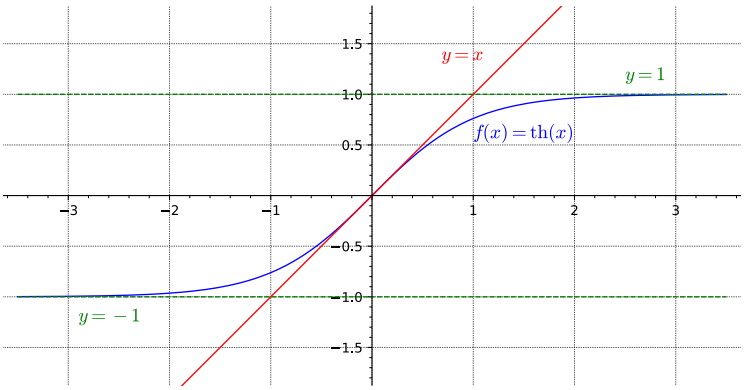
6. Posons $g : x \mapsto x - \text{th}(x)$, pour $x \in [0, +\infty[$, de telle sorte que l'inégalité à démontrer soit équivalente à $g(x) \geqslant 0$. Alors on peut dériver et, sans faire de calculs inutiles mais en ré-utilisant $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$, on obtient directement $g'(x) = 1 - \text{th}'(x)$ soit $\boxed{g'(x) = \text{th}^2(x) \geqslant 0}$ (c'est positif parce que c'est un carré). De plus $g(0) = 0 - \text{th}(0) = 0$. On en déduit donc que g est croissante sur $[0, +\infty[$ et donc $\boxed{\forall x \in [0, +\infty[,\ g(x) \geqslant 0}$ ce qui est l'inégalité à démontrer.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(19)

Les limites ne sont pas nécessaires mais sachant $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{th}(x) = 1$ on déduit directement $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
En utilisant l'imparité, on déduit que si $x \in]-\infty, 0]$ on a $-x \in [0, +\infty[$ donc $\text{th}(-x) \leqslant -x$, ce qui donne $-\text{th}(x) \leqslant -x$. Mais $\text{th}(x) \leqslant 0$, $|\text{th}(x)| = -\text{th}(x)$. On a donc bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |\text{th}(x)| \leqslant |x|}$.

7. On n'oublie pas d'indiquer la position par rapport à la droite $y = x$ ainsi que les asymptotes $y = 1$ en $+\infty$, $y = -1$ en $-\infty$. La fonction étant impaire, le graphe est symétrique par rapport à l'origine.



Partie B

8. Supposons que f soit constante et vérifie $(*)$: il existe alors $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$. Reportant dans $(*)$, on a alors
$$c = \frac{c+c}{1+c^2} \tag{20}$$
soit $c(1+c^2) = 2c$. On trouve alors $c = 0$ ou, si $c \neq 0$, $1 + c^2 = 2$ soit $c^2 = 1$ et donc $c = \pm 1$.
Conclusion : $\boxed{\text{les fonctions } f \text{ constantes qui vérifient } (*) \text{ sont les fonctions constantes égales à } -1,\ 0 \text{ ou } 1}$.
9. Supposons que f vérifie $(*)$, appliquons la propriété avec $x = y = 0$. Cela donne alors
$$f(0) = \frac{f(0)+f(0)}{1+f(0)\times f(0)} \tag{21}$$
et donc $f(0) \times (1 + f^2(0)) = 2f(0)$. Mais c'est la même équation qu'au dessus de solutions $\{-1, 0, 1\}$ et donc on trouve $\boxed{f(0) \in \{-1, 0, 1\}}$.
10. Supposons que f vérifie $(*)$ et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 1$. Appliquons la propriété $(*)$ avec $y \leftarrow a$, on obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+a) = \frac{f(x)+1}{1+f(x)} = 1 \tag{22}$$
Cela signifie bien que f est constante, quitte à appliquer cette égalité à $x - a$ (a est fixé) on obtient $\boxed{f(x) = 1}$.
Si maintenant a est tel que $f(a) = -1$ alors on obtient de même
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+a) = \frac{f(x)-1}{1-f(x)} = -1 \tag{23}$$
et donc $\boxed{f \text{ est constante égale à } -1}$.
11. Supposons que f vérifie $(*)$ et que $f(0) = 0$. Appliquons la propriété $(*)$ avec un $x \in \mathbb{R}$ et avec $y \leftarrow -x$, ce qui donne
$$0 = f(0) = f(x-x) = \frac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)} \tag{24}$$
On obtient donc $f(x) + f(-x) = 0$ soit $\boxed{f(-x) = -f(x)}$. Ceci est la définition de « f est impaire ».
12. C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, en raisonnant proprement par l'absurde :
Supposons qu'il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant 1$. Comme f n'est pas constante, on a vu qu'on ne peut pas avoir $f(x) = 1$, donc $f(x) > 1$. D'autre part $f(0) = 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué entre 0 et x, et à f qui est continue sur $\mathbb{R}$, il devrait exister un $a \in \mathbb{R}$ (entre 0 et x) tel que $f(a) = 1$. Mais là encore ceci est contradictoire car on suppose f non-constante. C'est donc que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 1}$.
On raisonne de même de l'autre côté : supposons par l'absurde qu'il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leqslant -1$, alors en fait $f(x) < -1$ car f n'est pas constante, mais par le théorème des valeurs intermédiaires f va prendre la valeur -1, ce qu'on exclut. Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ -1 < f(x)}$.
Remarque : dans ce contexte le point de vue « si f est continue alors l'image d'un intervalle par f est encore un intervalle » est intéressant : l'image de f doit être un intervalle, contenant 0, mais qui ne peut pas contenir ni 1 ni -1 ; il est donc inclus dans $]-1, 1[$.

13. (a) Fixons $x \in \mathbb{R}$ et démontrons par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) : « \frac{1+f(nx)}{1-f(nx)} = \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n » \tag{25}$$

- Initialisation avec $n = 0$: il s'agit de montrer $\frac{1+f(0)}{1-f(0)} = \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^0$. Mais $f(0) = 0$, et tout nombre à la puissance 0 donne 1, c'est donc $1 = 1$, et $\boxed{\mathcal{P}(0) \text{ est vraie}}$.
- Remarque : avec $n = 1$, c'est $\frac{1+f(x)}{1-f(x)} = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ ce qui est bien vrai aussi.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Démontrons $\mathcal{P}(n+1)$, en partant de $f((n+1)x) = f(nx+x)$ et en appliquant la propriété $(*)$ avec $x \leftarrow nx$ et $y \leftarrow x$. On obtient alors

$$\frac{1+f((n+1)x)}{1-f((n+1)x)} = \frac{1+\frac{f(nx)+f(x)}{1+f(nx)f(x)}}{1-\frac{f(nx)+f(x)}{1+f(nx)f(x)}} \tag{26}$$

Pour la fraction du dessus, mettant au même dénominateur :

$$1+\frac{f(nx)+f(x)}{1+f(nx)f(x)} = \frac{1+f(nx)f(x)+f(nx)+f(x)}{1+f(nx)f(x)} \tag{27}$$

$$= \frac{(1+f(x))(1+f(nx))}{1+f(nx)f(x)} \tag{28}$$

De même en dessous :

$$1-\frac{f(nx)+f(x)}{1+f(nx)f(x)} = \frac{1+f(nx)f(x)-f(nx)-f(x)}{1+f(nx)f(x)} \tag{29}$$

$$= \frac{(1-f(x))(1-f(nx))}{1+f(nx)f(x)} \tag{30}$$

Le quotient se simplifie donc :

$$\frac{1+f((n+1)x)}{1-f((n+1)x)} = \frac{\frac{(1+f(x))(1+f(nx))}{1+f(nx)f(x)}}{\frac{(1-f(x))(1+f(nx))}{1+f(nx)f(x)}} \tag{31}$$

$$= \frac{(1+f(x))(1+f(nx))}{(1-f(x))(1-f(nx))} \tag{32}$$

$$= \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \times \frac{1+f(nx)}{1-f(nx)} \tag{33}$$

Cela nous permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$:

$$\frac{1+f((n+1)x)}{1-f((n+1)x)} = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \times \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n \tag{34}$$

$$= \boxed{\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^{n+1} = \frac{1+f((n+1)x)}{1-f((n+1)x)}} \tag{35}$$

C'est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : on a bien démontré $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)}$.

(b) La relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit donc de montrer qu'elle est aussi vraie si $n \in \mathbb{Z}$ est négatif ou, ce qui revient au même, de la vérifier pour $-n$ si $n \in \mathbb{N}$. On souhaite donc démontrer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1+f(-nx)}{1-f(-nx)} = \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^{-n} \tag{36}$$

Or, à droite

$$\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^{n}} = \left(\frac{1}{\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}\right)^{n} = \left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)^{n} \tag{37}$$

et à gauche, par imparité de f

$$\frac{1+f(-nx)}{1-f(-nx)} = \frac{1-f(nx)}{1+f(nx)} \tag{38}$$

Il s'agit donc de démontrer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1-f(nx)}{1+f(nx)} = \left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)^{n} \tag{39}$$

Mais c'est une conséquence de la propriété établie à la question 13.(a) : elle est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc en particulier elle est vraie pour $-x$, et donc on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1+f(-nx)}{1-f(-nx)} = \left(\frac{1+f(-x)}{1-f(-x)}\right)^{n} \tag{40}$$

ce qui par imparité de f donne

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1-f(nx)}{1+f(nx)} = \left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)^{n}} \tag{41}$$

Comme on l'a vue, cela est équivalent à

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1+f(-nx)}{1-f(-nx)} = \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^{-n}} \tag{42}$$

(c) On applique la propriété de la question 13.(a) avec $n \leftarrow q$ ($q \in \mathbb{N}^*$) et $x \leftarrow \frac{x}{q}$, ce qui nous donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1+f(x)}{1-f(x)} = \left(\frac{1+f(\frac{x}{q})}{1-f(\frac{x}{q})}\right)^{q} \tag{43}$$

Et maintenant on peut appliquer la puissance $\frac{1}{q}$ des deux côtés : c'est précisément la bijection réciproque de l'élévation à la puissance q, et tous les termes $\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ sont bien positifs car $-1 < f(x) < 1$. On obtient donc directement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1+f(\frac{x}{q})}{1-f(\frac{x}{q})}} \tag{44}$$

14. Remarquons que $b > 0$, alors si on prend $x = 1$ on a par les questions précédentes

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1+f(n)}{1-f(n)} = b^n \tag{45}$$

Voyant cela comme une équation dont il faut extraire $f(n)$, on trouve $1+f(n) = b^n(1-f(n))$ soit $1+f(n) = b^n - b^n f(n)$, d'où $(1+b^n)f(n) = b^n - 1$ d'où encore $\boxed{f(n) = \dfrac{b^n-1}{b^n+1}}$ valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Si maintenant $r \in \mathbb{Q}$, cela signifie qu'il existe des entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$. On applique alors la propriété de la question 13.(c) avec $x \leftarrow p$ et ce même q, qui donne

$$\frac{1+f(\frac{p}{q})}{1-f(\frac{p}{q})} = \left(\frac{1+f(p)}{1-f(p)}\right)^{\frac{1}{q}} = (b^p)^{\frac{1}{q}} = b^{\frac{p}{q}} \tag{46}$$

Autrement dit on a $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\dfrac{1+f(r)}{1-f(r)} = b^r$. Mais là encore, voyant cela comme une équation dont il faut extraire r, on trouve $\boxed{f(r) = \dfrac{b^r-1}{b^r+1}}$, valable pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

15. Remarque : il s'agit de démontrer le fait que si deux fonctions **continues** sur $\mathbb{R}$ sont égales sur $\mathbb{Q}$, alors elles sont égales sur $\mathbb{R}$; x est un réel fixé quelconque.
    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On part de la définition de partie entière pour nx, qui donne l'encadrement $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1$. L'inégalité de gauche donne directement $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx$, qu'on peut diviser par n des deux côtés et on obtient $u_n \leqslant x$. L'inégalité de droite donne $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor$, qui en divisant par x donne $x - \frac{1}{n} < u_n$. En conclusion on a bien $\boxed{x - \frac{1}{n} < u_n \leqslant x}$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
    (b) Faisons tendre $n \to +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x - \frac{1}{n} = x$, et de l'autre côté de l'inégalité aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} x = x$. On est alors dans les bonnes hypothèses pour appliquer le théorème d'encadrement des gendarmes : u_n est encadré, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par deux suites qui convergent vers la même limite x, donc doit aussi converger vers x, et on conclut $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x}$.
    (c) Le nombre u_n est rationnel, on a donc
    $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(u_n) = \frac{b^{u_n} - 1}{b^{u_n} + 1} \tag{47}$$
    Passons à la limite pour $n \to +\infty$. À gauche, f est continue, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(x)$. Mais à droite la fonction $g : x \mapsto \dfrac{b^x - 1}{b^x + 1}$ est aussi continue, car on peut l'écrire $\dfrac{e^{x \ln(b)} - 1}{e^{x \ln(b)} + 1}$ et ceci est une composition de fonctions qui sont toutes continues, sur leur domaine de définition qui est $\mathbb{R}$. On en déduit donc aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n) = g(x)$. Mais la limite d'une suite est unique (c'est un théorème...) et donc on déduit $\boxed{f(x) = g(x)}$. La variable x était fixée mais ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. Conclusion :
    $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{b^x - 1}{b^x + 1}} \tag{48}$$

16. Ré-écrivons $f(x) = \dfrac{e^{x \ln(b)} - 1}{e^{x \ln(b)} + 1}$, ceci est égal à $\operatorname{th}(\lambda x) = \dfrac{e^{2\lambda x} - 1}{e^{2\lambda x} + 1}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(b) = 2\lambda$ soit $\lambda = \frac{\ln(b)}{2}$. Réciproquement, on vérifie que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \operatorname{th}(\lambda x)$ vérifie $(*)$ (pour $\lambda = 1$ c'est la question 5 du problème) :
    $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \operatorname{th}(\lambda(x + y)) = \operatorname{th}(\lambda x + \lambda y) = \frac{\operatorname{th}(\lambda x) - \operatorname{th}(\lambda y)}{1 + \operatorname{th}(\lambda x) \operatorname{th}(\lambda y)} \tag{49}$$
    Remarquons au passage que si $\lambda = 0$ ceci est la fonction constante nulle, et cela correspond à $b = 1$: les calculs des questions précédentes sont tous vrais pour $b = 1$. On peut garder l'expression en fonction de $\frac{\ln(b)}{2}$ plutôt que λ.
    Conclusions : tous les fonctions qui vérifient $(*)$ sont
    $$\boxed{\begin{array}{c} \text{La fonction constante } x \mapsto 1, \\ \text{La fonction constante } x \mapsto -1, \\ \text{Les fonctions } x \mapsto \operatorname{th}(\lambda x), \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}. \end{array}} \tag{50}$$
    Remarque : dans ce dernier cas, $\lambda = \frac{1}{2} \ln(b) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + f(1)}{1 - f(1)}\right) = \operatorname{th}^{-1}(1)$, et en effet avec $x = 1$ alors $\operatorname{th}(\lambda) = f(1)$.

Problème 2

1. Il est indispensable d'avoir sous ses yeux, ou sur son brouillon, le triangle de Pascal jusqu'à $n = 5$:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

(51)

On calcule alors tout simplement la somme des inverses sur chaque ligne :

$$u_0 = \frac{1}{1} = \boxed{1 = u_0} \tag{52}$$

$$u_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \boxed{2 = u_1} \tag{53}$$

$$u_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \boxed{\frac{5}{2} = u_2} \tag{54}$$

$$u_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} = 2 + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{8}{3} = u_3} \tag{55}$$

$$u_4 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{8}{3} = u_4} \tag{56}$$

$$u_5 = \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{1} = 2 + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \boxed{\frac{13}{5} = u_5} \tag{57}$$

2. La somme donne au moins 2 car il y toujours au moins un premier terme et un dernier terme égaux à 1, et la somme contient $n+1$ termes tous inférieurs ou égaux à 1 donc est inférieure à $n+1$. Pour l'exprimer formellement, on écrit :
D'une part si $n \geqslant 1$

$$u_n = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} \tag{58}$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant 2 \tag{59}$$

car $\binom{n}{0} = \binom{n}{1} = 1$, et la somme au milieu est une somme de termes positifs. Ce calcul nécessite bien $n \geqslant 1$.
D'autre part : $\forall 0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} \geqslant 1$ donc $\frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant 1$. Sommant ces inégalités on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \tag{60}$$

Ici le calcul est en fait valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion : $\boxed{2 \leqslant u_n \leqslant n+1}$.

3. On rappelle qu'on calcule les coefficients binomiaux concrètement avec la formule

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots 1} \tag{61}$$

On a notamment

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \tag{62}$$

Alors d'une part d'une part, en mettant tout au même dénominateur

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} &= \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} && (63)\\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}} && (64)\\
&= 1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n(n-1)} && (65)\\
&= \frac{n(n-1)+(n-1)+2}{n(n-1)} && (66)\\
&= \frac{n^2-n+n-1+2}{n(n-1)} && (67)\\
&= \boxed{\frac{n^2+1}{n(n-1)} = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}}} && (68)
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} &= \frac{1}{\binom{n+1}{0}} + \frac{1}{\binom{n+1}{1}} + \frac{1}{\binom{n+1}{2}} + \frac{1}{\binom{n+1}{3}} && (69)\\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{\frac{(n+1)n}{2}} + \frac{1}{\frac{(n+1)n(n-1)}{6}} && (70)\\
&= 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)} + \frac{6}{n(n+1)(n-1)} && (71)\\
&= \frac{n(n+1)(n-1)+n(n-1)+2(n-1)+6}{n(n+1)(n-1)} && (72)\\
&= \frac{n^3-n+n^2-n+2n-2+6}{n(n+1)(n-1)} && (73)\\
&= \boxed{\frac{n^3+n^2+4}{n(n+1)(n-1)} = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}} && (74)
\end{aligned}$$

On a alors l'inégalité à montrer qui est

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} &\iff \frac{n^2+1}{n(n-1)} \geqslant \frac{n^3+n^2+4}{n(n+1)(n-1)} && (75)\\
&\iff (n+1)(n^2+1) \geqslant n^3+n^2+4 && (76)\\
&\iff n^3+n^2+n+1 \geqslant n^3+n^2+4 && (77)\\
&\iff \boxed{n \geqslant 3} && (78)
\end{aligned}$$

Et donc l'inégalité à démontrer est précisément vraie si (et seulement si !) on a supposé $n \geqslant 3$.

4. *Petit erreur d'énoncé : il s'agit de $\frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}$; l'inégalité $\frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$ est vraie aussi mais ne permet pas de conclure.*

   On sort des termes des factorielles, comme dans la preuve de la formule de Pascal. L'inégalité à montrer est

équivalente à

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}} \iff \binom{n+1}{k+1} \geqslant \binom{n}{k} \tag{79}$$

$$\iff \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!} \geqslant \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{80}$$

$$\iff \frac{(n+1)\times n!}{(k+1)\times k!\times (n-k)!} \geqslant \frac{n!}{k!\times (n-k)!} \tag{81}$$

$$\iff \frac{n+1}{k+1} \geqslant 1 \tag{82}$$

$$\iff \boxed{n+1 \geqslant k+1} \tag{83}$$

ce qui est bien vrai pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$ (et même sans l'hypothèse $n \geqslant 3$).
Sommant ces inégalités pour $3 \leqslant k \leqslant n$, on obtient directement

$$\left(\forall 3 \leqslant k \leqslant n,\ \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}} \tag{84}$$

mais quitte à faire le changement d'indice $j = k+1$ cette dernière somme est directement égale à

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}} = \sum_{j=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{j}} \tag{85}$$

On peut alors renommer j en k. Conclusion :

$$\boxed{\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}} \tag{86}$$

5. Sommant les deux inégalités précédentes, on obtient bien pour $n \geqslant 3$

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} + \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} \tag{87}$$

Mais ceci est précisément, en regroupant les sommes de chaque côté

$$\boxed{\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}}_{u_n} \geqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}}_{u_{n+1}}} \tag{88}$$

vrai $\forall n \geqslant 3$ et donc $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 3} \text{ est décroissante}}$.
Remarque : les calculs de la première question montrent bien que la suite n'est pas décroissante à partir de $n \geqslant 0$, mais seulement $n \geqslant 3$.

6. (a) Toujours la même méthode de faire sortir des termes des factorielles pour essayer de factoriser des morceaux communs ou mettre au même dénominateur. On fixe $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Donnons un nom aux deux termes.
D'une part, on va clairement mettre au même dénominateur $(n+1)!$

$$\underbrace{\frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}}}_{A} = \frac{n+2}{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}} - \frac{2n+2}{\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}} \tag{89}$$

$$= \frac{(n+2)\times k!\times (n-k)!}{n!} - \frac{(2n+2)\times k!\times (n+1-k)!}{(n+1)!} \tag{90}$$

$$= \frac{(n+1)\times (n+2)\times k!\times (n-k)!}{(n+1)!} - \frac{(2n+2)\times k!\times (n+1-k)\times (n-k)!}{(n+1)!} \tag{91}$$

$$= \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!}\Big((n+1)(n+2) - (2n+2)(n+1-k)\Big) \tag{92}$$

Comme $2n+2 = 2(n+1)$, on peut encore factoriser par $n+1$, et le dénominateur devient $n!$:

$$A = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!} \times (n+1) \times \Big((n+2) - 2(n+1-k)\Big) \tag{93}$$

$$= \boxed{\frac{k!\,(n-k)!}{n!} \times (2k-n) = A} \tag{94}$$

D'autre part, on met le deuxième terme directement au même dénominateur $n!$ cette fois

$$\underbrace{\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}}_{B} = \frac{n-k}{\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}} - \frac{n-k+1}{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}} \tag{95}$$

$$= \frac{(n-k)\times(k+1)!\times(n-k-1)!}{n!} - \frac{(n-k+1)\times k!\times(n-k)!}{(n)!} \tag{96}$$

$$= \frac{(n-k)\times(k+1)\times k!\times(n-k-1)!}{n!} - \frac{(n-k+1)\times k!\times(n-k)\times(n-k-1)!}{(n)!} \tag{97}$$

$$= \frac{k!\,(n-k-1)!}{n!}\Big((n-k)(k+1) - (n-k+1)(n-k)\Big) \tag{98}$$

Factorisons un coup par $n-k$ pour rentrer dans la factorielle à gauche :

$$B = \frac{k!\times(n-k)\times(n-k-1)!}{n!} \times \Big((k+1) - (n-k+1)\Big) \tag{99}$$

$$= \boxed{\frac{k!\,(n-k)!}{n!} \times (2k-n) = B} \tag{100}$$

Conclusion : $\boxed{A = B}$, c'est l'égalité à démontrer.

(b) Sommons sur k. Plus précisément, sommons sur k le terme de gauche, mais seulement jusqu'à $n-1$ (car l'égalité elle-même est valable pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$), qui donne par linéarité de la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}}\right) = (n+2)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n}{k}} - (2n+2)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n+1}{k}} \tag{101}$$

Il reste à faire apparaitre les termes manquants dans la définition de u_n :

$$(n+2)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n}{k}} - (2n+2)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n+1}{k}} = (n+2)\left(u_n - \frac{1}{\binom{n}{n}}\right) - (2n+2)\left(u_{n+1} - \frac{1}{\binom{n+1}{n}} - \frac{1}{\binom{n+1}{n+1}}\right) \tag{102}$$

$$= \boxed{(n+2)\Big(u_n - 1\Big) - (2n+2)\Big(u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - 1\Big)} \tag{103}$$

Sommons aussi le terme de droite, mais il s'agit cette fois d'une somme téléscopique ! Posons par exemple $j = k+1$ dans la première partie :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}\right) \tag{104}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{n-j+1}{\binom{n}{j}}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}\right) \tag{105}$$

$$= \left(\frac{n}{n} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{n-j+1}{\binom{n}{j}}\right) - \left(\frac{n+1}{1} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}\right) \tag{106}$$

$$= 1 - (n+1) \tag{107}$$

$$= \boxed{-n} \tag{108}$$

Conclusion : $\boxed{(n+2)(u_n-1)-(2n+2)(u_{n+1}-\frac{1}{n+1}-1)=-n}$.

De cette égalité on tire

$$u_{n+1}-\frac{1}{n+1}-1=\frac{n+(n+2)(u_n-1)}{2n+2} \tag{109}$$

soit

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1+\frac{1}{n+1}+\frac{n+(n+2)(u_n-1)}{2n+2} && (110)\\ &= 1+\frac{2+n+(n+2)(u_n-1)}{2n+2} && (111)\\ &= 1+\frac{(n+2)(1+u_n-1)}{2n+2} && (112)\\ &= \boxed{1+\frac{n+2}{2n+2}u_n=u_{n+1}} && (113) \end{aligned}$$

Remarque : si on sait déjà que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors un passage à la limite dans l'égalité précédente montre que la limite ℓ vérifie nécessairement $\ell=1+\frac{1}{2}\ell$, donc $\ell=2$. Mais si on ne sait pas qu'elle converge et qu'on veut appliquer le théorème des gendarmes, il faut majorer tout ceci par des suites arithmético-géométriques.

7. (a) Analyse : la condition $\frac{n+2}{2n+2}<\lambda$ est équivalente à $n+2<\lambda(2n+2)$ soit $n+2<2\lambda n+2\lambda$, qu'on peut écrire $2-2\lambda<(2\lambda-1)n$ ou encore $n>\frac{2-2\lambda}{2\lambda-1}$ soit $n>\frac{2(\lambda-1)}{1-2\lambda}$. Par les hypothèses faites sur λ, ceci est le quotient de deux termes strictement positifs.

   Synthèse : on pose $\boxed{p\in\mathbb{N} \text{ tel que } p>\frac{2(\lambda-1)}{1-2\lambda}}$. Alors on a bien que pour tout $n\geqslant p$, $\frac{n+2}{2n+2}<\lambda$.

   (b) C'est presque évident.
   - C'est par définition pour $n=p$.
   - Soit $n\geqslant p$ tel que $u_n\leqslant v_n$, alors en multipliant cette inégalité (positive) par $\frac{n+2}{2n+2}<\lambda$ puis en ajoutant 1 on obtient $1+\frac{n+2}{2n+2}u_n\leqslant 1+\lambda v_n$, d'où $u_{n+1}\leqslant v_{n+1}$.

   (c) La suite $(v_n)_{n\geqslant p}$ est arithmético-géométrique démarrant à p. Le point fixe ℓ vérifie $\ell=1+\lambda\ell$ soit $\boxed{\ell=\frac{1}{1-\lambda}}$. On a alors

$$\forall n\geqslant p,\quad v_n-\ell=\lambda^{n-p}(v_p-\ell) \tag{114}$$

   Mais par les hypothèses sur λ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda^{n-p}=0$ et tout ceci montre $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell}$.

   En résumé à partir d'un certain rang u_n est inférieur au terme d'une suite qui converge vers $\frac{1}{1-\lambda}$. Encore une fois, si on savait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors on en déduit que sa limite est inférieure à $\frac{1}{1-\lambda}$, et comme on peut prendre λ aussi proche qu'on veut de $\frac{1}{2}$ alors la limite doit être 2. Mais tant qu'on ne sait pas que la suite converge il y a encore un petit peu de travail…

8. (d) Cela revient à choisir λ (qu'on prend toujours $\lambda<1$) tel que $\frac{1}{1-\lambda}<\frac{\mu+2}{2}$ soit $\frac{2}{\mu+2}<1-\lambda$ soit $\boxed{\lambda<1-\frac{2}{\mu+2}}$. Mais par hypothèse ce terme à droite vérifie $\frac{\mu+2}{2}>2$ donc $\frac{2}{\mu+2}<\frac{1}{2}$ donc $1-\frac{2}{\mu+2}>\frac{1}{2}$. Il existe donc bien $\lambda\in\mathbb{R}$ qui est strictement entre $\frac{1}{2}$ et $1-\frac{2}{\mu+2}$.

   Par la question précédente ce choix de λ détermine un entier p puis la suite $(v_n)_{n\geqslant p}$ avec $\forall n\geqslant p$, $v_n-\ell(\lambda)=\lambda^{n-p}(v_p-\ell(\lambda))$. On cherche alors $q\geqslant p$ tel que $\forall n\geqslant q$, $v_n-\ell(\lambda)<\frac{\mu-2}{2}$. Mais cette dernière condition est équivalente à $\lambda^{n-p}(v_p-\ell(\lambda))<\frac{\mu-2}{2}$ (remarquons que tous les termes ici sont positifs) soit $(n-p)\ln(\lambda)+\ln(v_p-\ell(\lambda))<\ln(\frac{\mu-2}{2})$ soit (on divise par $\ln(\lambda)<0$)

$$\boxed{n\geqslant p+\frac{\ln(\frac{\mu-2}{2})-\ln(v_p-\ell(\lambda))}{\ln(\lambda)}} \tag{115}$$

   On prend alors q plus grand que ce terme, et l'inégalité est alors vraie pour tout $n\geqslant q$.

   (e) Pour tout $n\geqslant q$ alors $v_n<\ell(\lambda)+\frac{\mu-2}{2}<\frac{\mu+2}{2}+\frac{\mu-2}{2}$ soit $\boxed{v_n<\mu}$.

9. Résumons :

- Pour tout $\mu > 2$,
- (on peut contruire λ, puis l'entier p, la suite $(v_n)_{n \geqslant p}$, l'entier q),
- Il existe un rang $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant q$,
- On a $u_n < \mu$.

Ceci est la définition (version lycée) de la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 2 : tout intervalle $[2, \mu[$ (pour tout $\mu > 2$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 2}$.