DS 4 Mathématiques

Exercice 1

Donner le domaine de définition des fonctions réelles suivantes.

$$f : x \mapsto \ln(2e^{2x} - 7e^x + 6) \qquad g : x \mapsto \sqrt[3]{x-4} + \sqrt[4]{x-3} \tag{1}$$

$$h : x \mapsto \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} \qquad i : x \mapsto \frac{\tan(3x)}{\arctan(3x)} \tag{2}$$

Exercice 2

Un groupe de 45 élèves de BCPST et 2 accompagnateurs s'installe dans un bus. Le bus est constitué de 53 places : 12 rangées de 2 places sur le côté gauche, idem sur le côté droit, et 5 places au fond sur toute la largeur. On ne tient pas compte du chauffeur, qui a sa propre place à l'avant.

1. De combien de façons différentes peut-on asseoir tout le monde dans le bus ?
2. De combien de façons différentes peut-on grouper les élèves en 20 binômes plus un groupe de 5 ?

À partir de maintenant on suppose que les 4 premières places (c'est à dire la première rangée) sont réservées aux accompagnateurs.

3. Reprendre la question : de combien de façons peut-on asseoir tout le monde dans le bus ?
4. Parmi ces façons, combien d'entre elles sont telles que (chaque situation ci-dessous est indépendante) ?
   (a) Les 5 places au fond sont complètement occupées.
   (b) Un élève nommé X doit être côté fenêtre.
   (c) Deux élèves X et Y ne doivent pas être côté à côte (ni simultanément sur la rangée du fond).

Problème 1

On souhaite étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \arccos(u_n) \tag{$*$}$$

en fonction de la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$. Mais on ne sait pas encore si tout cela est bien défini... Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des valeurs u_0 pour lesquelles le terme u_n est bien défini, et $\mathscr{D}_\infty$ l'ensemble des valeurs de u_0 pour lesquels *tous* les termes de la suite sont bien définis.

1. (a) Rappeler le domaine de définition de la fonction arccos et en déduire $\mathscr{D}_1$.
   (b) Montrer que $\mathscr{D}_2 = [\cos(1), 1]$.
   (c) Déterminer $\mathscr{D}_3$.
2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $f^n = \underbrace{\arccos \circ \arccos \circ \cdots \circ \arccos}_{n \text{ fois}}$.
   (a) Prouver que $u_n = f^n(u_0)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
   (b) En déduire que $\mathscr{D}_{n+1} = \cos(\mathscr{D}_n)$, où $\cos(\mathscr{D}_n)$ est l'image directe de $\mathscr{D}_n$ par cos.
   (c) Donner $\mathscr{D}_4$ et $\mathscr{D}_5$.
3. On pose alors la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $c_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \cos(c_n)$.
   (a) Démontrer que $0 \leqslant c_{2k+1} \leqslant c_{2k+3} \leqslant c_{2k+2} \leqslant c_{2k} \leqslant 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que
   $$\forall n \geqslant 2, \quad \mathscr{D}_n = \begin{cases} [c_{n-1}, c_{n-2}] & \text{si } n \text{ est pair} \\ [c_{n-2}, c_{n-1}] & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \tag{3}$$
4. On considère les ensembles $\mathscr{A} = \{c_{2k} \mid k \geqslant 0\}$ et $\mathscr{B} = \{c_{2k+1} \mid k \geqslant 0\}$.

(a) Justifier que $\mathscr{A}$ admet une borne inférieure, qu'on notera a, et que $\mathscr{B}$ admet une borne supérieure, qu'on notera b.

(b) En considérant les ensembles $\cos(\mathscr{A})$ et $\cos(\mathscr{B})$, montrer que $b = \cos(a)$ et que $a = \cos(b)$.

(c) Tracer le tableau de variations de $x \mapsto \cos(x) - x$ sur $[0, \pi]$.

(d) En déduire que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution dans $[0, \pi]$, puis que $a = b$.

5. (a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}_\infty$.

(b) En déduire que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors elle est constante égale à a.

Problème d'informatique

On souhaite écrire un programme Python pour compter automatiquement les anagrammes d'un mot. On suppose qu'un mot est représenté par une chaine de caractères `m`, formée uniquement avec les lettres de l'alphabet de `a` à `z`. On rappelle qu'un anagramme d'un mot est un mot constitué des même lettres, éventuellement dans un autre ordre, par exemple les mots `"chien"` et `"niche"` sont anagrammes l'un de l'autre.
On aura besoin de compter combien de fois chaque lettre apparait dans le mot. Pour cela, on suppose qu'on dispose d'une chaine de caractères `alphabet = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"` de longueur 26. Ainsi la j-ème lettre de l'alphabet est donnée par `alphabet[j]` — en considérant que `a` est la lettre numérotée 0 et `z` la lettre numérotée 25.

1. Écrire une fonction `numéro_lettre(x)` qui prend en argument une lettre `x` (on suppose que c'est bien l'une des 26 lettres de l'alphabet) et qui renvoie son numéro.
2. Écrire une fonction `compte_lettre(m, j)` qui prend en argument un mot `m` et un numéro de lettre `j`, et renvoie le nombre de fois où la lettre numéro `j` apparait dans le mot `m`.
3. Écrire une fonction `compte_tout(m)` qui prend en argument un mot `m` et qui renvoie une liste `C` de longueur 26, où `C[j]` donne le nombre de fois que la lettre numéro `j` apparait dans `m`.
4. Écrire une fonction récursive `factoriel(n)` qui prend en argument un nombre entier $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie $n!$.
5. Recopier sur sa copie en complétant la fonction suivante pour qu'elle renvoie le nombre d'anagrammes du mot `m` :

```python
def nombre_anagrammes(m):
    n = len(m)
    C = compte_tout(m)
    numérateur = ...
    dénominateur = ...
    for ... :
        ...
    return numérateur // dénominateur # division en nombres entiers
```

6. Que teste la fonction suivante sur le mot `m` ? Justifier.

```python
def est_spécial(m):
    C = compte_tout(m)
    for j in range(26):
        if C[j] != 0 and C[j] != 1:
            return False
    return True
```

Problème 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une **partition** de n est la donnée d'une écriture de n comme somme d'entiers naturels non-nuls. Par exemple on peut écrire $4 = 1+3$ ou bien $4 = 2+2$ ou bien $4 = 1+1+2$ ou encore $4 = 1+1+1+1$ qui sont quatre partitions différentes de l'entier 4 ; on inclut aussi l'écriture $4 = 4$. Les nombres dans la partition peuvent toujours être rangés par ordre croissant, on ne considère donc pas que $3+1$ est une autre partition de 4. Et puisqu'ils sont non-nuls, il n'y a pas de partition telle que $4 = 0+2+2$. En résumé on dira qu'il y a cinq partitions différentes

du nombre 4. Le nombre 1, lui, admet pour seule partition $1 = 1$, et le nombre 2 admet les deux partitions $2 = 2$ et $2 = 1 + 1$.
Plus formellement, une partition de n est la donnée d'un nombre $k \geqslant 1$ et d'une suite $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ d'entiers naturels non-nuls, rangés par ordre croissant, tels que $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$. Le nombre k s'appelle la *longueur* de la partition. On note p_n le nombre de partitions de l'entier n, et on note $p(n, k)$ le nombre de partitions de longueur exactement k. On a vu sur l'exemple ci-dessus que $p_4 = 5$, avec $p(4, 1) = 1$, $p(4, 2) = 2$, $p(4, 3) = 1$ et $p(4, 4) = 1$.

1. (a) Donner les trois partitions de 3.
   (b) Vérifier que $p_5 = 7$ en listant les partitions de 5 ; on donnera aussi leur longueur.
   (c) Calculer p_6.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que valent $p(n, 1)$ et $p(n, n)$? Qu'est-ce que $p(n, k)$ si $k > n$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, dénombrer les partitions de longueur deux de n. On pourra distinguer selon la parité de n.
3. On note maintenant E_n l'ensemble de toutes les partitions de l'entier n, et $E_{n,k}$ l'ensemble des partitions de longueur k.
   (a) Justifier que $E_n = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} E_{n,k}$ et que ces ensembles sont deux à deux disjoints.
   (b) En déduire $p_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p(n, k)$.
4. On fixe maintenant $n > k > 1$. On note $\mathscr{A} \subset E_{n,k}$ l'ensemble des partitions $(a_1, \dots, a_k)$ de n telles que $a_1 = 1$, et $\mathscr{B} \subset E_{n,k}$ l'ensemble des partitions $(a_1, \dots, a_k)$ de n telles que $a_1 > 1$.
   (a) Justifier que $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} = E_{n,k}$ et que $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \emptyset$.
   (b) Donner une bijection φ entre $\mathscr{A}$ et $E_{n-1,k-1}$.
   (c) Montrer que l'application ψ qui à une partition $(a_1, \dots, a_k)$ de n associe la partition $(a_1 - 1, \dots, a_k - 1)$ est une bijection entre $\mathscr{B}$ et $E_{n-k,k}$.
   (d) En déduire la relation
   $$p(n, k) = p(n - 1, k - 1) + p(n - k, k) \qquad (*)$$
5. Dans un tableau, donner les valeurs de $p(n, k)$ pour $1 \leqslant n, k \leqslant 8$.
6. (a) Écrire une fonction Python récursive `p(n, k)` qui renvoie le nombre $p(n, k)$.
   (b) En déduire une fonction `partitions(n)` qui renvoie le nombre de partitions de n.