DS 5 Mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}$.
2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La condition $A^2 = \alpha A + \beta I_2$ est équivalente à
$$\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -5 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ -\alpha & 4\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \tag{1}$$
c'est-à-dire
$$\begin{cases} -1 = \alpha + \beta \\ 10 = 2\alpha \\ -5 = -\alpha \\ 14 = 4\alpha + \beta \end{cases} \tag{2}$$
On trouve rapidement que $\alpha = 5$ puis que $\beta = -6$ vérifient bien les quatre équations. Conclusion : $A^2 = 5A - 6I_2$.
3. On sait déjà que $A^0 = I_2$, donc on peut poser $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$. On sait aussi $A^1 = A$ donc on peut poser $u_1 = 1$ et $v_1 = 0$.
On construit alors les suites par récurrence, en prenant pour hypothèse $\mathcal{P}(n)$ qu'il existe des *termes* (et non pas des suites) u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I_2$:
Pour $n = 0$ on vient de le dire, $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Alors de $A^n = u_n A + v_n I_2$ on déduit
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n && (3) \\ &= A(u_n A + v_n I_2) && (4) \\ &= u_n A^2 + v_n A I_2 && (5) \\ &= u_n(5A - 6I_2) + v_n A && (6) \\ &= 5u_n A - 6u_n I_2 + v_n A && (7) \\ &= \underbrace{(5u_n + v_n)}_{u_{n+1}} A + \underbrace{-6u_n}_{v_{n+1}} I_2 && (8) \end{aligned}$$
On voit qu'il faut poser $u_{n+1} = 5u_n + v_n$ et $v_{n+1} = -6u_n$. Ceci démontre $\mathcal{P}(n)$.
Conclusion : ceci construit nos suites, en donnant la relation de récurrence.
4. En résumé nos suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + v_n \\ v_{n+1} = -6u_n \end{cases} \tag{9}$$
On en déduite alors (simplement en remplaçant n par $n+1$) $u_{n+2} = 5u_{n+1} + v_{n+1}$ puis on remplace v_{n+1} et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Si on part de v_{n+1} alors on trouve $v_{n+2} = -6u_{n+1} = -6(5u_n + v_n)$ donc $v_{n+2} = -30u_n - 6v_n$, mais $-30u_n = 5v_{n+1}$, donc on trouve la relation de récurrence $v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n$.
5. Pour les deux suites la relation de récurrence est la même, l'équation caractéristique est $q^2 = 5q - 6$ c'est-à-dire $q^2 - 5q + 6 = 0$. On trouve $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$ et les racines $q = \frac{5\pm1}{2}$ soit 2 et 3.
Pour (u_n) : il existe donc des constantes $(C, D) \in \mathbb{R}^2$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = C \times 2^n + D \times 3^n$. Avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ on trouve
$$\begin{cases} 0 = C + D \\ 1 = 2C + 3D \end{cases} \tag{10}$$

d'où (par exemple remplacer C par $-D$) $D=1$ puis $C=-1$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2^n + 3^n$.
Pour (v_n) : il existe des constantes E et F (ce ne sont pas les mêmes) telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = E \times 2^n + F \times 3^n$. De plus on sait $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$. On a donc

$$\begin{cases} 1 = E + F \\ 0 = 2E + 3F \end{cases} \tag{11}$$

d'où on trouve (par exemple $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$) $F = -2$ puis $E = 3$. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n$.

6. En résumé, on a

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ A^n &= u_n A + v_n I_2 && (12)\\
&= (-2^n + 3^n)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + (3 \times 2^n - 2 \times 3^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && (13)\\
&= \begin{pmatrix} -2^n + 3^n & 2(-2^n + 3^n) \\ 2^n - 3^n & 4(-2^n + 3^n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 \times 3^n & 0 \\ 0 & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix} && (14)\\
&= \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 3^n & -2 \times 2^n + 2 \times 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 2 \times 3^n \end{pmatrix} && (15)
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. On calcule directement $I_{0,0} = \int_{-1}^{1} 1 \, \mathrm{d}t = \Big[t\Big]_{-1}^{1} = 2$.

   On trouve aussi $I_{1,0} = \int_{-1}^{1} (t-1) \, \mathrm{d}t = \left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0 - \frac{(-2)^2}{2} = -2$. Par des calculs similaires, $I_{0,1} = \int_{-1}^{1} (t+1) \, \mathrm{d}t = \left[\frac{(t+1)^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2^2}{2} - 0 = 2$.

2. Pour $p = 0$ la fonction à primitiver est $t \mapsto (t+1)^q$ et une primitive est $t \mapsto \frac{(t+1)^{q+1}}{q+1}$. On trouve donc

$$\begin{aligned}
I_{0,q} &= \int_{-1}^{1} (t+1)^q \, \mathrm{d}t && (16)\\
&= \left[\frac{(t+1)^{q+1}}{q+1}\right]_{-1}^{1} && (17)\\
&= \frac{2^{q+1}}{q+1} - 0 && (18)\\
&= \frac{2^{q+1}}{q+1} && (19)
\end{aligned}$$

3. Pour tout $p \geqslant 1$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$, dans $I_{p,q} = \int_{-1}^{1} (t-1)^p (t+1)^q \, \mathrm{d}t$, intégrons par partie en dérivant $(t-1)^p$ (pour faire apparaitre le p devant l'intégrale). On pose donc $v(t) = (t-1)^p$, d'où $v'(t) = p(t-1)^{p-1}$, on pose $u'(t) = (t+1)^q$ dont une primitive est, comme à la question précédente, $u(t) = \frac{(t+1)^{q+1}}{q+1}$. Ces quatre fonctions sont bien continues sur l'intervalle d'intégration (rappelons que $p \geqslant 1$ donc $p-1 \geqslant 0$) et le théorème d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (t+1)^q \, \mathrm{d}t &= \left[(t-1)^p \times \frac{(t+1)^{q+1}}{q+1}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} p(t-1)^{p-1} \times \frac{(t+1)^{q+1}}{q+1} \, \mathrm{d}t && (20)\\
&= 0 - 0 - \frac{p}{q+1} \int_{-1}^{1} (t-1)^{p-1} (t+1)^{q+1} \, \mathrm{d}t && (21)\\
&= -\frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1} && (22)
\end{aligned}$$

   En effet le terme $(t+1)^{q+1}$ s'annule en $t = -1$, et le terme $(t-1)^p$ s'annule en $t = 1$ (pour celui-ci, il est nécessaire d'avoir $p \geqslant 1$).

4. Connaissant $I_{0,q}$, et la relation donnant $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p-1,q+1}$, on peut calculer les intégrales $I_{p,q}$ avec une fonction récursive. Ce n'est pas spécialement difficile mais le point intéressant est de remarquer que c'est l'entier p qui diminue à chaque étape, donc la partie initialisation de la récursivité est pour $p = 0$, où on doit renvoyer la valeur de $I_{0,q}$ calculée précédemment.

```python
def I(p, q):
    if p == 0:
        return 2**(q+1) / (q+1)
    else:
        return - p / (q+1) * I(p-1, q+1)
```

5. On note $\mathcal{P}(p)$ la propriété « $\forall q \in \mathbb{N},\ I_{p,q} = (-1)^p \dfrac{2^{p+q+1} p!\, q!}{(p+q+1)!}$ ». Démontrons ce résultat par récurrence sur p.

   Initialisation : pour $p = 0$ il s'agit de démontrer $\forall q \in \mathbb{N},\ I_{0,q} = \frac{2^{q+1} q!}{(q+1)!}$. Mais $\frac{q!}{(q+1)!} = \frac{q!}{(q+1)\times q!} = \frac{1}{q+1}$ et donc on tombe bien sur $I_{0,q} = \frac{2^{q+1}}{q+1}$ que nous avons établi à la question précédente.

   Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(p)$. Alors pour $p+1$, et pour tout $q \in \mathbb{N}$, on part de $I_{p+1,q} = -\frac{p+1}{q+1} I_{p,q+1}$. Par l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(p)$, cela nous donne

$$\begin{aligned}
I_{p+1,q} &= -\frac{p+1}{q+1} \times (-1)^p \frac{2^{p+(q+1)+1} p!\,(q+1)!}{(p+(q+1)+1)!} && (23)\\
&= (-1)^{p+1} \times 2^{p+q+2} \times \frac{(p+1)\times p! \times q!}{(q+1)\times(p+q+2)!} && (24)\\
&= (-1)^{p+1} \times 2^{(p+1)+q+1} \times \frac{(p+1)! \times (q+1) \times q!}{(q+1)\times((p+1)+q+1)!} && (25)\\
&= (-1)^{p+1} \times 2^{(p+1)+q+1} \times \frac{(p+1)! \times q!}{((p+1)+q+1)!} && (26)\\
&= (-1)^{p+1} \times \frac{2^{(p+1)+q+1} \times (p+1)! \times q!}{((p+1)+q+1)!} && (27)
\end{aligned}$$

   Ceci est valable pour tout $q \in \mathbb{N}$, et cela termine de démontrer $\mathcal{P}(p+1)$.

   Remarque : nous sommes dans un cas intéressant où il est **crucial** que le quantificateur $\forall q$ soit **sous** l'hypothèse de récurrence, car si on tente de démontrer $\mathcal{P}(p+1)$ pour un certain entier q on utilise $\mathcal{P}(p)$ pour un **autre** entier q ; cela est bien possible à la condition que l'hypothèse de récurrence contienne bien le $\forall q$.

6. Pour $p = q$ on déduit tout simplement $I_{p,p} = (-1)^p \frac{2^{2p+1} p!\, p!}{(2p+1)!}$. Mais remarquons que $\binom{2p}{p} = \frac{(2p)!}{p!\,(2p-p)!} = \frac{(2p)!}{(p!)^2}$. Ainsi $(2p+1)\binom{2p}{p} = \frac{(2p+1)\times(2p)!}{(p!)^2} = \frac{(2p+1)!}{(p!)^2}$. On reconnait donc bien $I_{p,p} = (-1)^p \frac{2^{2p+1}}{(2p+1)\binom{2p}{p}}$.

7. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [-1, 1]$, observons que $(t-1)^p \times (t+1)^p = \Big((t-1)\times(t+1)\Big)^p = (t^2-1)^p$. Appliquons le binôme de Newton à ceci, on déduit

$$\begin{aligned}
(t^2-1)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (t^2)^k \times (-1)^{p-k} && (28)\\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} t^{2k} && (29)
\end{aligned}$$

Intégrons maintenant cette égalité vraie pour tout t sur l'intervalle d'intégration :

$$\begin{aligned}
I_{p,p} &= \int_{-1}^{1} (t^2-1)^p \,\mathrm{d}t & (30)\\
&= \int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} t^{2k} \right) \mathrm{d}t & (31)\\
&= \sum_{k=0}^{p} \int_{-1}^{1} \left((-1)^{p-k} \binom{p}{k} t^{2k} \right) \mathrm{d}t & (32)\\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \int_{-1}^{1} t^{2k} \,\mathrm{d}t & (33)\\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right]_{-1}^{1} & (34)\\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{1}{2k+1} \left(1^{2k+1} - (-1)^{2k+1} \right) & (35)\\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{1}{2k+1} \times 2 & (36)
\end{aligned}$$

et cela est la formule demandée.

Exercice d'informatique

1. Aucune fonction n'étant donnée, il faut savoir faire une matrice nulle, carrée. Ensuite, mettre des 1 sur la diagonale.

```python
def identité(n):
    A = [[0 for _ in range(n)] for _ in range(n)]
    for i in range(n):
        A[i][i] = 1
    return A
```

2. Au-delà du calcul de sommes, il s'agit de bien comprendre quel indice est fixé et quel indice bouge... Pour sommer la ligne i c'est une boucle sur j (et i est passé en argument à la fonction), pour la colonne j c'est l'inverse. N'ayant pas la fonction taille, on utilise tout simplement `len(A)` (en admettant que la matrice est carrée).

```python
def somme_ligne(A, i):
    n = len(A)
    S = 0
    for j in range(n):
        S = S + A[i][j]
    return S

def somme_colonne(A, j):
    n = len(A)
    S = 0
    for i in range(n):
        S = S + A[i][j]
    return S
```

3. Il faut une double boucle, qui comme d'habitude quitte la fonction si elle trouve un coefficient qui n'est pas positif, et si on arrive à la fin on sait qu'on n'a pas quitté la fonction plus tôt donc que tous les coefficients sont bien positifs...

```python
def est_positive(A):
    n = len(A)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if A[i][j] < 0:
                return False
    return True
```

4. Il s'agit de tester toutes les conditions : positive, toutes les sommes de lignes égales à 1, toutes les sommes de colonnes égales à 1. Toujours avec ce même principe de quitter dès qu'une condition n'est pas vérifiée, sinon `return True` tout à la fin. Cette fois-ci il n'y a pas de double boucle, mais les tests pour les lignes et pour les colonnes sont consécutifs !

```python
def est_bistochastique(A):
    n = len(A)
    if not est_positive(A):
        return False
    for i in range(n):
        if somme_ligne(A, i) != 1:
            return False
    for j in range(n):
        if somme_colonne(A, j) != 1:
            return False
    return True
```

Problème 1

1. Une primitive est la fonction arctangente, donc

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} &= \Big[\arctan(t)\Big]_0^x && (37)\\ &= \arctan(x) - \arctan(0) && (38)\\ &= \arctan(x) && (39)\end{aligned}$$

2. On peut fixer $t \in \mathbb{R}$ (car $1 + t^2 > 0$, ceci est toujours défini). L'égalité à démontrer peut se ré-écrire $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2} - (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$, on note $\mathcal{P}(n)$ cette égalité.
Initialisation : pour $n = 0$ on a d'une part $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} = t^0 = 1$ et d'autre part

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+t^2} - (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} &= \frac{1}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2} && (40)\\ &= \frac{1+t^2}{1+t^2} && (41)\\ &= 1 && (42)\end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$, alors

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k t^{2k} = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\right) + (-1)^{n+1}t^{2(n+1)} \tag{43}$$

$$= \left(\frac{1}{1+t^2} - (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right) + (-1)^{n+1}t^{2n+2} \qquad \text{(par } \mathcal{P}(n)\text{)} \tag{44}$$

$$= \frac{1}{1+t^2} - (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} + (-1)^{n+1}t^{2n+2} \tag{45}$$

$$= \frac{1}{1+t^2} - \left((-1)^{n+1}t^{2n+2} - (-1)^{n+1}t^{2n+2}(1+t^2)\right) \tag{46}$$

$$= \frac{1}{1+t^2} - \left((-1)^{n+1}t^{2n+2} - (-1)^{n+1}t^{2n+2} - (-1)^{n+1}t^{2n+4}\right) \tag{47}$$

$$= \frac{1}{1+t^2} + (-1)^{n+1}t^{2n+4} \tag{48}$$

$$= \frac{1}{1+t^2} - (-1)^{n+2}t^{2n+4} \tag{49}$$

et ceci démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

Remarque : tout ceci est un cas particulier de somme des termes successifs d'une suite géométrique de raison $-t^2$:

$$\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \tag{50}$$

...

3. Intégrons l'expression précédente entre 0 et x :

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \tag{51}$$

$$= \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \tag{52}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\int_0^x (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t + \int_0^x (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \tag{53}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^x t^{2k}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \tag{54}$$

Jusque là nous avons seulement utilisé la linéarité de l'intégrale. Il s'agit ensuite de calculer

$$\int_0^x t^{2k}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^x \tag{55}$$

$$= \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - 0 \tag{56}$$

$$= \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \tag{57}$$

et donc on trouve bien $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

4. Dans $\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, posons $t = ux$, alors $\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$. De plus quant t varie de 0 à x alors u varie de 0 à 1. On trouve donc immédiatement

$$\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(ux)^{2n+2}}{1+(ux)^2} \times x\,\mathrm{d}u \tag{58}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2n+2}u^{2n+2}}{1+x^2u^2} \times x\,\mathrm{d}u \tag{59}$$

$$= \int_0^1 x^{2n+3}\frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u \tag{60}$$

$$= x^{2n+3}\int_0^1 \frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u \tag{61}$$

Ceci est l'égalité voulue.

5. On va intégrer par rapport à u l'inégalité entre 0 et 1, il est donc important qu'elle soit vraie pour tout $u \in [0,1]$. Rappelant que $x \geqslant 0$ est fixé, alors $x^2u^2 \geqslant 0$ et donc tout simplement $1+x^2u^2 \geqslant 1$ donc $\frac{1}{1+x^2u^2} \leqslant 1$. Multipliant par u^{2n+2} donne directement $\frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2} \leqslant u^{2n+2}$, et tout ceci est positif.
On résume bien :
$$\forall u \in [0,1], \quad 0 \leqslant \frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2} \leqslant u^{2n+2} \tag{62}$$
donc par croissance de l'intégrale (on intègre l'inégalité par rapport à u)
$$\int_0^1 0 \,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2} \,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 u^{2n+2} \,\mathrm{d}u \tag{63}$$
c'est-à-dire
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2} \,\mathrm{d}u \leqslant \left[\frac{u^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1 \tag{64}$$
soit
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2} \,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2n+3} \tag{65}$$
Rappelant que
$$\left|\arctan(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| = \left|(-1)^{n+1} x^{2n+3} \int_0^1 \frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2} \,\mathrm{d}u\right| \tag{66}$$
alors l'intégrale est positive, le signe $(-1)^{n+1}$ s'en va, $x \geqslant 0$, et donc
$$\begin{aligned}\left|\arctan(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| &= x^{2n+3} \int_0^1 \frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2} \,\mathrm{d}u && (67)\\ &\leqslant x^{2n+3} \times \frac{1}{2n+3} && (68)\end{aligned}$$
et c'est l'inégalité à démontrer.

6. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+3}}{2n+3} = 0$. Ici il est intéressant de séparer le cas où $0 \leqslant x < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} x^{2n+3} = 0$, puis on divise par $2n+3$ qui tend vers $+\infty$; et le cas $x = 1$, où $x^{2n+3} = 1$ mais de même on divise par $2n+3$ qui tend vers $+\infty$.
C'est alors un théorème de limite par encadrement qui permet de conclure. Éventuellement on peut le ré-écrire sans la valeur absolue
$$-\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \arctan(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \tag{69}$$
et donc quand $n \to +\infty$, le premier et le dernier terme tendent vers 0 ; par le théorème des gendarmes, le terme au milieu tend vers 0 aussi, ce qui est équivalent à dire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x)$.

7. Question classique, méthode du seuil. Il faut calculer une somme, et s'arrêter quand le terme $\frac{x^{2n+3}}{2n+3}$ devient strictement plus petit que ε, donc il faut continuer la boucle **tant que** ce terme est plus grand que ε. À la fin l'écart entre la somme et $\arctan(x)$ est garanti strictement inférieur à ε.

```
def arctan(x, epsilon):
    S = 0
    k = 0
    while x**(2*k+3) / (2*k+3) >= epsilon:
        S = S + (-1)**k * x**(2*k+1) / (2*k+1)
    return S
```

8. Sachant que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, il suffit de calculer $4 \times \arctan(1)$ avec la fonction précédente. Mais attention, car

$$\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| < \varepsilon \iff \left|\pi - 4 \times \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| < 4\varepsilon \tag{70}$$

Il faut donc en fait que l'écart soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{4}$ pour qu'en multipliant par 4 l'écart soit inférieur à ε !

```
def pi(epsilon):
    return 4 * arctan(1, epsilon / 4)
```

On peut aussi ré-écrire la fonction précédente en éliminant les puissances de x...

Remarque : il y a une différence significative entre le cas $x < 1$ et $x = 1$. En effet dans le premier cas alors les termes x^{2k+1} convergent déjà rapidement vers 0 et la somme précédente converge vite et donne une bonne précision. En revanche pour $x = 1$ le terme de majoration est simplement $\frac{1}{2n+3}$ qui converge vers 0 beaucoup plus lentement qu'une suite géométrique et il faut sommer beaucoup plus de termes pour arriver à la même précision. D'où l'intérêt des formules d'arctangente permettant d'exprimer $\arctan(1)$ en fonction de valeurs de $\arctan(x)$ pour des x beaucoup plus petits et pour lesquels la convergence est beaucoup plus rapide.

Problème 2

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. L'équation $AX = \lambda X$ est équivalente au système linéaire

$$\begin{cases} 2x + y - z = \lambda x \\ -3x - z = \lambda y \\ -3x - y = \lambda z \end{cases} \tag{71}$$

$$\iff \begin{cases} (2-\lambda)x + y - z = 0 \\ -3x - \lambda y - z = 0 \\ -3x - y - \lambda z = 0 \end{cases} \tag{72}$$

On obtient un système (S_λ) du même type que dans le DM 3. Il peut être plus intéressant d'échelonner par rapport à y :

$$(S_\lambda) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} y + (2-\lambda)x - z = 0 \\ -y - 3x - \lambda z = 0 \\ -\lambda y - 3x - z = 0 \end{cases} \tag{73}$$

puis

$$(S_\lambda) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1}}{\iff} \begin{cases} y + (2-\lambda)x - z = 0 \\ (-1-\lambda)x - (1+\lambda)z = 0 \\ (\lambda(2-\lambda)-3)x - (1+\lambda)z = 0 \end{cases} \tag{74}$$

Distinguons maintenant le cas $\lambda = -1$, alors

$$(S_{-1}) \iff \begin{cases} y + 3x - z = 0 \\ 0 = 0 \\ -6x = 0 \end{cases} \tag{75}$$

On trouve $x = 0$, z libre et $y = z$. L'ensemble des solutions est $\{\,(0, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\,\}$.

Si $\lambda \neq -1$ alors on peut simplifier et

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} y + (2-\lambda)x - z = 0 \\ - x - z = 0 \\ + (\lambda(2-\lambda)-3)x - (1+\lambda)z = 0 \end{cases} \tag{76}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda(2-\lambda)-3)L_2}{\iff} \begin{cases} y + (2-\lambda)x - z = 0 \\ - x - z = 0 \\ + \alpha z = 0 \end{cases} \tag{77}$$

où le coefficient $\alpha = -(1+\lambda) - (\lambda(2-\lambda) - 3)$ qui se simplifie en $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ et ceci est $(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Ainsi il faut encore distinguer :

Cas $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 2$: alors on peut simplifier dans L_3 et trouver $z = 0$. Puis en remontant le système admet pour unique solution $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Cas $\lambda = 1$: il faut ré-écrire le système

$$(S_1) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} y & + & x & - & z & = & 0 \\ & - & x & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \tag{78}$$

On trouve que z est libre, $x = -z$, $y = z - x = 2z$. L'ensemble des solutions est $\{ (-z, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R} \}$.

Cas $\lambda = 2$: alors de même

$$(S_2) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} y & & & - & z & = & 0 \\ & - & x & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \tag{79}$$

On trouve que z est libre, $x = -z$, $y = z$. L'ensemble des solutions est $\{ (-z, z, z) \mid z \in \mathbb{R} \}$.

Remarque : la matrice D suivante contient sur sa diagonale exactement les valeurs λ pour lesquelles le système (S_λ) n'est pas de rang maximal ; et la matrice P est formée en prenant en colonne *une* solution (elles ne sont pas uniques) non nulle du système (S_λ), pour chaque λ, mis dans le même ordre que sur D. Rien de tout cela n'est un hasard…

2. Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors l'équation $PX = Y$ est équivalente au système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & u \\ -x & - & 2y & + & z & = & v \\ -x & - & y & + & z & = & w \end{array} \right. \tag{80}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & u \\ & - & y & + & z & = & v + u \\ & & & & z & = & w + u \end{array} \right. \tag{81}$$

On voit déjà que le système est échelonné, de rang 3 : il admet une unique solution, la matrice est inversible. On trouve alors $w = u + w$ puis $y = z - (v + u) = (u + w) - v - u = -v + w$ et enfin $x = u - y = u - (-v + w) = u + v - w$. En conclusion

$$PX = Y \iff X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} Y \tag{82}$$

et ceci nous donne la matrice inverse de P.

3. On calcule pas à pas, par exemple AP puis $P^{-1}(AP)$ et on doit bien trouver cette matrice diagonale.
4. On peut raisonner directement par équivalence : B commute avec A si et seulement si

$$\begin{aligned} & BA = AB && (83) \\ \iff & P^{-1}BA = P^{-1}AB && (\times P^{-1} \text{ à gauche}) \quad (84) \\ \iff & P^{-1}BAP = P^{-1}ABP && (\times P \text{ à droite}) \quad (85) \\ \iff & P^{-1}BPP^{-1}AP = P^{-1}APP^{-1}BP && (\text{insérer } PP^{-1} = I_3) \quad (86) \\ \iff & \left(P^{-1}BP\right)\left(P^{-1}AP\right) = \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}BP\right) && (87) \end{aligned}$$

ce qui est bien la condition que $P^{-1}BP$ commute avec $P^{-1}AP$. On pouvait aussi raisonner du bas vers le haut…

5. Analyse : on pose $C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}$. Alors C commute avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ si et seulement si $CD = DC$. On calcule alors ces deux produits et on trouve

$$CD = \begin{pmatrix} 2c_{1,1} & c_{1,2} & -c_{1,3} \\ 2c_{2,1} & c_{2,2} & -c_{2,3} \\ 2c_{3,1} & c_{3,2} & -c_{3,3} \end{pmatrix}, \quad DC = \begin{pmatrix} 2c_{1,1} & 2c_{1,2} & 2c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ -c_{3,1} & -c_{3,2} & -c_{3,3} \end{pmatrix} \tag{88}$$

(multiplier à gauche par une matrice diagonale multiplie unes par unes les lignes ; multiplier à droite multiplie les colonnes). Identifiant les coefficients, l'égalité $CD = DC$ est donc équivalente à

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2c_{1,1} & = & 2c_{1,1} \\ c_{1,2} & = & 2c_{2,1} \\ -c_{1,3} & = & 2c_{1,3} \\ 2c_{2,1} & = & c_{2,1} \\ c_{2,2} & = & c_{2,2} \\ -c_{2,3} & = & c_{2,3} \\ 2c_{3,1} & = & -c_{3,1} \\ c_{3,2} & = & -c_{3,2} \\ -c_{3,3} & = & -c_{3,3} \end{array}\right. \tag{89}$$

Ces égalités impliquent successivement $c_{1,2} = 0$, $c_{1,3} = 0$, $c_{2,1} = 0$, $c_{2,3} = 0$, $c_{3,1} = 0$, $c_{3,2} = 0$, autrement dit tous les coefficients hors de la diagonale doivent être nuls ; mais ne disent rien sur les coefficients diagonaux. On en déduit que C doit être une matrice diagonale.

Mais réciproquement les matrices diagonales commutent entre elles, donc toutes les matrices diagonales commutent avec D.

Conclusion : les matrices qui commutent avec D sont exactement les matrices diagonales.

6. Une matrice B commute avec A si et seulement si $P^{-1}BP$ commute avec $P^{-1}AP$, donc si et seulement si $P^{-1}BP$ est une matrice diagonale E. Mais si $P^{-1}BP = E$ alors $B = PEP^{-1}$. Donc l'ensemble des matrices qui commute avec A est exactement l'ensemble des PEP^{-1} où E est une matrice diagonale.

7. Montrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: « $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

   Initialisation : pour $n = 0$, $D^n = I_3$ et donc $PD^nP^{-1} = PP^{-1} = I_3$, qui est aussi A^0.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Alors $A^{n+1} = AA^n = APD^nP^{-1}$ par hypothèse de récurrence, mais de $A = PDP^{-1}$ on déduit $AP = PD$ donc $APD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Ceci est A^{n+1}, et démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

   On en déduit alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{90}$$

   Il est alors possible de mener le calcul jusqu'au bout (ce n'est pas énormément intéressant ; merci les logiciels de calcul formel) et on trouve

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & -2^n + 1 \\ -2^n + (-1)^n & -2^n + 2 & 2^n + (-1)^n - 2 \\ -2^n + (-1)^n & -2^n + 1 & 2^n + (-1)^n - 1 \end{pmatrix} \tag{91}$$