DS 5 Mathématiques

Durée : 3 heures. Calculatrices et documents non autorisés.
Le sujet contient uniquement des exercices « mini-problèmes ». Ils peuvent être traités dans l'ordre souhaité. Mais dans chacun il y a un ordre logique des questions, auquel il faut prêter attention même si on peut bien sûr passer à la suite en admettant une question.

Préliminaires pour les questions d'informatique On représente les matrices par des listes de listes, en donnant la liste de leur lignes, comme d'habitude. Ansi si `A` représente une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (n, p seront toujours des entiers $\geqslant 1$), le coefficient d'indice (i, j) de A, en prenant $0 \leqslant i < n$ et $0 \leqslant j < p$ (la convention informatique diffère de celle mathématiques), est simplement `A[i][j]`. Pour travailler, on suppose qu'on a déjà écrit les fonctions suivantes, qu'on peut donc utiliser directement, sans plus de commentaires :

— `matrice_nulle(n, p)` : crée une matrice nulle de dimensions (n, p).
— `taille(A)` : retourne le tuple (n, p) des dimensions de la matrice A.
— `somme(A, B)` : retourne la matrice de la somme $A + B$, où A et B sont des matrices de taille compatible.
— `produit(A, B)` : retourne la matrice du produit $A.B$, où A et B sont des matrices de taille compatible.

De plus, dans les questions, on demande que les fonctions renvoient le bon résultat par rapport aux hypothèses qui sont faites sur les arguments qu'on leur donne : par exemple dans une expression telle que « une fonction qui prend en argument une matrice supposée carrée » on n'a pas besoin de vérifier dans la fonction que la matrice est carrée et on n'a pas besoin d'instructions telles que `assert` ni de message d'erreurs.

Exercice 1

Le but est de calculer l'intégrale

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{4}{\sin(t)\cos^3(t)}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

1. À l'aide d'un système linéaire, déterminer $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \quad \frac{4}{x(1-x^2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{x+1} + \frac{e}{(x+1)^2} \tag{2}$$

2. Calculer I avec le changement de variables $x = \sin(t)$.

Exercice 2

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

1. Calculer A^2 et montrer que $A^2 = A + I_2$.
2. (a) En déduire qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = u_{n+1}A + u_nI_2$.
   (b) Comment s'appelle la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \left(\begin{smallmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_{n+2} \end{smallmatrix}\right)$
   (d) Donner l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (e) En déduire une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ *(on n'utilisera pas cette expression dans la suite)*.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En exprimant $(A^n)^2$ de deux façons différentes, donner des expressions de u_{2n} et de u_{2n+1} en fonction de u_n, u_{n+1} et u_{n+2}.

4. On souhaite en déduire de nouvelles méthodes de calcul de la suite (u_n).
   (a) Écrire une fonction Python `identite(n)` qui prend en argument un entier n supposé strictement positif et qui renvoie une matrice identité de taille n.
   (b) Écrire une fonction Python `puissance(M, k)` qui prend en argument une matrice M supposée carrée de taille quelconque et un entier k supposé positif et qui renvoie la matrice M^k. On pourra choisir une méthode itérative ou une méthode récursive.
   (c) En déduire une fonction Python `suite(n)` qui calcule la matrice A^n puis renvoie le terme u_n.
5. On veut maintenant améliorer cette méthode de calcul. Pour cela, on remarque que les puissances d'une matrice M carrée quelconque vérifient

$$\forall k \geqslant 1, \quad M^k = \begin{cases} \left(M^{k/2}\right)^2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ M.M^{k-1} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \tag{4}$$

   (a) Expliquer pourquoi cela est plus rapide pour calculer les puissances que la méthode habituelle.
   (b) Écrire une fonction récursive `puissance_rapide(M, k)` qui calcule la puissance M^k d'une matrice M, supposée carrée, pour $k \in \mathbb{N}$ par cette méthode.
   (c) En déduire une fonction `suite_rapide(n)` qui calcule le terme u_n pour $n \in \mathbb{N}$ à partir de A^n.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de cet exercice est de donner *toutes* les primitives de la fonction $f_n : x \mapsto x^n \arctan(x)$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$

$$F_n : x \longmapsto \int_0^x t^n \arctan(t)\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

1. Rappeler le domaine de définition de f_n. Sur quel(s) intervalle(s) admet-elle des primitives ?
2. Caluler F_0 et F_1 en utilisant une intégration par parties.
3. Démontrer par récurrence la formule suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{p} (-1)^k t^{2k} = (-1)^p \frac{t^{2p+2}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} \tag{6}$$

4. Avec une intégration par parties, calculer F_n si n est impair.
5. En utilisant la relation de la question 3, calculer F_n si n est pair.
6. Conclure en donnant toutes les primitives de f_n.

Exercice 4

On s'intéresse aux matrices carrées de taille 3. Une *racine carrée* de $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Le but est de déterminer toutes les racines carrées de la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ -12 & 8 & 16 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

1. Écrire une fonction Python `est_racine(R)` qui prend en argument une matrice R supposée carrée de taille 3 et qui renvoie `True` si R est une racine carrée de cette matrice A et `False` sinon.
2. On donne la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

   Montrer que P est inversible et donner P^{-1}.

3. Calculer $P^{-1}AP$ et montrer qu'il s'agit d'une matrice diagonale, qu'on note $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ sont tous les trois positifs et distincts deux à deux.
4. (a) Trouver quatre matrices Q telles que $Q^2 = D$. On les note Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.
   (b) Pour chacune de ces quatre matrices, en déduire que la matrice qu'on note $R = PQP^{-1}$ est une racine carrée de A, et en déduire que A a au moins quatre racines carrées R_1, R_2, R_3, R_4.
5. Le but est maintenant de montrer que ce sont les seules racines carrées de A.
   (a) Soit $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $S^2 = D$. Montrer que S et D commutent.
   (b) En posant $S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} \\ s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, montrer que $SD = DS$ si et seulement si S est une matrice diagonale.
   (c) En déduire qu'à la question 4 on a trouvé exactement toutes les racines carrées de D.
   (d) En déduire que les matrices R_1, R_2, R_3, R_4 sont exactement les racines carrées de A.

Exercice 5

Pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, \mathrm{d}x \tag{9}$$

1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $I_{p,q} = I_{q,p}$ à l'aide du changement de variable $t = 1 - x$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $I_{n,0}$ et $I_{0,n}$.
3. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I_{p,q+1} = \frac{q+1}{p+1} I_{p+1,q}$.
4. Écrire une fonction Python récursive `I(p, q)` qui calcule $I_{p,q}$ en utilisant cette relation de récurrence, où les variables p, q sont supposées être des entiers positifs.
5. Par récurrence, démontrer la proposition suivante :

$$\mathcal{P}(q) : \quad « \ \forall p \in \mathbb{N}, \ I_{p,q} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!} \ ». \tag{10}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de cette question est de simplifier la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1}$.
   (a) Montrer que $I_{n,n} = S_n$.
   (b) En déduire que $S_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)}$.