DS 5 Mathématiques

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer A^2.
2. À l'aide d'un système linéaire, montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.
3. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = u_n A + v_n I_2$. On donnera les relations de récurrence vérifiées par les deux suites.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient des relations de récurrence linéaires d'ordre 2.
5. Donner les expressions de u_n et de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et en déduire une formule pour A^n en fonction de n.

Exercice 2

On pose, pour deux entiers $p, q \in \mathbb{N}$, $I_{p,q} = \displaystyle\int_{-1}^{1} (t-1)^p (t+1)^q \,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $I_{0,0}$, $I_{1,0}$ et $I_{0,1}$.
2. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, calculer $I_{0,q}$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tous $q \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant 1$, $I_{p,q} = -\dfrac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}$.
4. En déduire une fonction Python récursive `I(p, q)` qui prend en argument deux entiers positifs p, q et renvoie la valeur de $I_{p,q}$.
5. Montrer par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(p)$: « $\forall q \in \mathbb{N}$, $I_{p,q} = (-1)^p \dfrac{2^{p+q+1} p!\, q!}{(p+q+1)!}$ ».
6. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{p,p} = (-1)^p \dfrac{2^{2p+1}}{(2p+1)\binom{2p}{p}}$.
7. Montrer que pour $p \in \mathbb{N}$, $I_{p,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{2}{2k+1}$. *Indication : binôme de Newton.*

Exercice d'informatique

On représente les matrices en Python par des listes de listes, en donnant la liste de leurs lignes. Les matrices qu'on manipule sont supposées carrées (on ne demande pas de vérifier cette condition). Aucune fonction de manipulation des matrices n'est supposée déjà donnée. Par cohérence on numérotera les lignes et les colonnes des matrices en mathématiques à partir de 0.

1. Écrire une fonction `identité(n)` qui renvoie une matrice identité de taille n.

Une matrice $A = (a_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *bistochastique* si tous ses coefficients sont positifs et si, de plus, la somme des coefficients sur chaque ligne est égale à 1 et la somme des coefficients sur chaque colonne est aussi égale à 1, par exemple $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

2. Écrire deux fonctions prenant en argument une matrice A, `somme_ligne(A, i)` qui renvoie la somme de tous les coefficients de la i-ème ligne de A, et `somme_colonne(A, j)` qui renvoie la somme de tous les coefficients de la j-ième colonne de A.
3. Écrire une fonction `est_positive(A)` qui renvoie `True` si tous les coefficients de A sont positifs, et `False` sinon.
4. Écrire une fonction `est_bistochastique(A)` qui renvoie `True` si la matrice A est bistochastique, et `False` sinon.

Problème 1

On fixe un réel $x \geqslant 0$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.
3. En déduire l'expression $\displaystyle\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
4. Avec le changement de variable $t = ux$, montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x^{2n+3} \int_0^1 \frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u$.
5. Justifier l'inégalité $\forall u \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2} \leqslant u^{2n+2}$ et en déduire
$$\left| \arctan(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \tag{1}$$
6. Justifier que si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x)$.
7. En déduire une fonction Python `arctan(x, epsilon)` qui prend en argument un nombre réel x en supposant $0 \leqslant x \leqslant 1$ et qui renvoie une approximation de $\arctan(x)$ avec un écart garanti strictement inférieur à `epsilon`.
8. En appliquant la méthode précédente en $x = 1$, déduire une fonction `pi(epsilon)` qui renvoie une approximation de π, avec un écart garanti strictement inférieur à ε.

Problème 2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Donner toutes les solutions de l'équation $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Montrer que P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
3. Montrer que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On notera D cette matrice.

On s'intéresse maintenant à décrire toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $BA = AB$.

4. Montrer que B commute avec A si et seulement $P^{-1}BP$ commute avec $D = P^{-1}AP$.
5. Déterminer toutes les matrices $C = \left(\begin{smallmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{smallmatrix}\right)$ qui commutent avec D.
6. En déduire toutes les matrices qui commutent avec A. On pourra laisser le résultat sous forme de produit de matrices.
7. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, et exprimer D^n en fonction de n.