DS 6 Mathématiques
Correction

Problème 1

Partie mathématique

1. (a) On a directement

$$\boxed{M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3} \quad \text{et} \quad \boxed{3M\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = J} \tag{1}$$

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le calcul du produit de matrices donne

$$M(a)M(b) = \begin{pmatrix} (1-2a)(1-2b)+ab+ab & (1-2a)b+a(1-2b)+ab & (1-2a)b+ab+a(1-2b) \\ a(1-2b)+(1-2a)b+ab & ab+(1-2a)(1-2b)++ab & ab+(1-2a)b+a(1-2b) \\ a(1-2b)+ab+(1-2a)b & ab+a(1-2b)+(1-2a)b & ab+ab+(1-2a)(1-2b) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Or on vérifie que (il n'a y que deux types de coefficients : sur ou hors de la diagonale) :

- Pour les termes sur la diagonale : $(1-2a)(1-2b)+ab+ab = 1-2a-2b+6ab$ qui est aussi égal à $1-2(a+b-3ab)$.
- Pour les termes hors de la diagonale : $(1-2a)b+a(1-2b)+ab = a+b-3ab$.

C'est donc bien $\boxed{M(a)M(b) = M(a+b-3ab)}$.

(c) Attention au raisonnement. On cherche, directement, un inverse de $M(a)$.
Sachant $M(0) = I_3$, la matrice serait inversible d'inverse $M(b)$ si on peut trouver b tel que $a+b-3ab = 0$. Cette équation sur b donne $b(1-3a)+a = 0$ qui admet une unique solution $b = -\frac{a}{1-3a}$ si jamais $a \neq \frac{1}{3}$. Cela répond à un sens de la question :

- Si $a \neq \frac{1}{3}$, alors on pose $\boxed{b = -\frac{a}{1-3a}}$ et alors par ces calculs $M(a)M(b) = I_3$, par symétrie (de l'expression de la question précédente en a et b) on a aussi $M(b)M(a) = I_3$. Donc $\boxed{M(a) \text{ est inversible}}$, $\boxed{\text{d'inverse } M(b)}$.
- Si $a = \frac{1}{3}$, alors $M(a) = \frac{1}{3}J$. Cette matrice n'est $\boxed{\text{pas inversible}}$ car elle est de rang 1 — toutes les lignes sont les mêmes donc elle s'échelonne directement en $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion : $\boxed{M(a) \text{ est inversible si et seulement si } a \neq \frac{1}{3}}$.

(d) Par les questions précédentes, un nombre réel a vérifie $M^2(a) = M(a)$ si et seulement si $a+a-3a^2 = a$. Cette équation est équivalente à $a-3a^2 = 0$ soit $a(1-3a) = 0$.

Conclusion : l'unique réel réel non-nul a_0 tel que $M(a_0)^2 = M(a_0)$ est $\boxed{a_0 = \frac{1}{3}}$.

2. On a alors $P = \frac{1}{3}J = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

(a) a est fixé et on cherche $b \in \mathbb{R}$ tel que $M(a) = P + bQ$. En regardant les coefficients hors de la diagonale, on doit avoir $a = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}b$. En regardant ceux sur la diagonale on doit avoir $1-2a = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}b$. On trouve qu'il y a bien une unique solution à ces deux équations : $\boxed{b = 1-3a}$.

On calcule, autant que possible avec leurs propriétés algébriques et chassant les fractions, $\boxed{P^2 = P}$ (c'est la question 1.(d)), $QP = P - P^2 = P - P$ donc $\boxed{QP = 0_{3,3}}$, $PQ = P - P^2 = P - P$ donc $\boxed{PQ = 0_{3,3}}$, et $Q^2 = (I_3 - P)^2 = I_3 - 2P + P^2 = I_3 - 2P + P = I_3 - P$ soit $\boxed{Q^2 = Q}$.

(b) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « il existe $b_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n(a) = P + b_n Q$ ».

- Pour $n = 1$: c'est la question précédente, on pose $b_1 = 1 - 3a$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$, on dispose de $b_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n(a) = P + b_n Q$. Multiplions cette égalité par $M(a)$ pour passer à $M^{n+1}(a)$: alors $M^{n+1}(a) = M(a) \cdot M^n(a) = (P + bQ) \cdot (P + b_n Q)$ (par la question précédente et par $\mathcal{P}(n)$) donc en développant $M^{n+1}(a) = P^2 + bQP + b_n PQ + bb_n Q^2$ soit $\boxed{M^{n+1} = P + bb_n Q}$. On pose alors $\boxed{b_{n+1} = b \times b_n}$ et on a démontré $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : par récurrence, on a démontré $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) On a $b_1 = b = 1 - 3a$, et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} = b \times b_n$, donc il s'agit d'une suite géométrique (démarrant à $n = 1$ de raison b). On déduit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = (1-3a)^n}$.

En résumé, on a montré à ce stade :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{M^n(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-3a)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-3a)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-3a)^n \end{pmatrix}} \tag{3}$$

Cette expression est aussi valable pour $n = 0$…

(d) On a $M(a) = P + bQ$, il faut vérifier $PQ = QP$ (les deux sont nulles), on peut bien appliquer le binôme de Newton :

$$\forall n \geqslant 1, \quad M^n(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{n-k}(bQ)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k P^{n-k} Q^k \tag{4}$$

Comme $P^2 = P$, on déduit immédiatement $\forall k \geqslant 1$, $P^k = P$, donc $P^{n-k} = P$ pour $k < n$. De même, $Q^2 = Q$ donc $Q^k = Q$ pour $k \geqslant 1$. Il faut donc sortir ces termes de la somme :

$$M^n(a) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} b^k PQ + P + b^n Q \tag{5}$$

Comme PQ est nul aussi, il reste directement

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{M^n(a) = P + b^n Q} \tag{6}$$

3. Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. L'équation $M(a)X = X$ est équivalente au système linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (1-2a)x & + & ay & + & az & = & x \\ ax & + & (1-2a)y & + & az & = & y \\ ax & + & ay & + & (1-2a)z & = & z \end{array} \right. \tag{7}$$

Ramenant toutes les inconnues du côté gauche, c'est aussi

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2ax & + & ay & + & az & = & 0 \\ ax & - & 2ay & + & az & = & 0 \\ ax & + & ay & - & 2az & = & 0 \end{array} \right. \tag{8}$$

Sous cette forme on n'a pas de pivot ne dépendant pas du paramètre mais il est tout de même bien clair qu'on peut distinguer le cas $a = 0$:

- Si $a = 0$: le système est entièrement nul, ce qui signifie que tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est solution. Effectivement d'ailleurs $M(0)$ est la matrice identité et donc $M(0)X = X$ est vrai quelque soit la matrice X. Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ x \end{smallmatrix}\right) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}}$.
- Si $a \neq 0$: on peut simplifier par a et on est ramené au système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \tag{9}$$

Échelonner ce dernier ne pose pas de problèmes particuliers : permuter les lignes amène à

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \tag{10}$$

puis faire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ amène à

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & 3y & + & 3z & = & 0 \\ & + & 3y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \tag{11}$$

Alors L_3 s'élimine et on peut diviser L_2 par 3 :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \tag{12}$$

On trouve alors que z est libre, on pose $z = t \in \mathbb{R}$, puis $y = z = t$ puis $x = -y + 2z = -t + 2t = t$. Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}}$.

Modélisation

4. (a) Au départ par hypothèse $\boxed{X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$. Après une période, $\frac{2}{3}$ des bactéries de type A se sont renouvelées, et pour le $\frac{1}{3}$ restant, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ a formé des bactéries de type B et $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ a formé des bactéries de type C. Il reste donc $\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}}$.

   (b) À chaque période a_{n+1} va être égal à $\frac{2}{3}a_n$ (les bactéries de type A qui sont renouvelées) additionné à $\frac{1}{6}b_n$ (la moitié du tiers restant des bactéries de type B qui se transforment en A) et à $\frac{1}{6}c_n$ (idem pour le type C qui se transforme en A) soit la relation $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n$. On a de même pour les autres types, on peut résumer cela en

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n \end{cases} \tag{13}$$

   Si on pose la matrice $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$ alors le système ci-dessus se ré-écrit $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}} \tag{14}$$

   Ceci est une matrice $M(\beta)$ pour $\boxed{\beta = \frac{1}{6}}$.

   (c) Récurrence facile. On pose $\mathcal{P}(n)$: « $X_n = M^n(\beta)X_0$ ».
   - Pour $n = 0$: comme par définition M^0 est la matrice identité, on a bien $X_0 = M^0(\beta)X_0$ (quelque soit β).
   - Hérédité : soit $n \in \mathcal{P}(n)$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Alors $X_{n+1} = M(\beta)X_n$, qui est donc égal par $\mathcal{P}(n)$ à $M(\beta) \cdot M^n(\beta)X_0$, donc on a bien $\boxed{X_{n+1} = M^{n+1}(\beta)X_0}$.

   Conclusion : par récurrence on a bien $\mathcal{P}(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. On sait par la première partie du problème que $M^n(\beta) = P + b_n Q = P + (1-3a)^n Q$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'après notre expression de $M^n(a)$ de la partie précédente, qu'on multiplie par le vecteur $X_0 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, on trouve :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-3a)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n \end{pmatrix} \tag{15}$$
ce qui donne bien avec $a = \beta = \frac{1}{6}$ les trois relations :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\begin{cases} a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times (\frac{1}{2})^n \\ b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2})^n \\ c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2})^n \end{cases}} \tag{16}$$

6. (a) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, on déduit
$$\boxed{a_\infty = b_\infty = c_\infty = \frac{1}{3}} \tag{17}$$
   (b) Plus le temps passe, plus les types de bactéries présentes se mélangent et s'homogénéisent ; au bout d'un moment elles sont présentes dans les même proportions.

Exercice 1

Posons la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$. L'équation (E_n) est équivalente à $f_n(x) = 0$.

1. On trace le tableau de variations de f_n sur $[0,1]$: f_n est dérivable et $f_n'(x) = nx^{n-1} + \cdots + 1 > 0$, la fonction f_n est strictement croissante (c'est en fait une somme de fonctions strictement croissantes, donc il n'y a même pas besoin de dériver). On a de plus $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n - 1$ (il y a n puissances de x). Dès que $n \geqslant 1$ alors $f_n(1) \geqslant 0$.

x	0	x_n	1
$f_n'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	-1 ↗	0 ↗	$n-1$

(18)

   Donc : par le théorème de la bijection $\boxed{\text{l'équation } (E_n) \text{ admet une unique solution dans } [0,1]}$.

2.
   - Par définition (E_1) est l'équation $x = 1$ donc $\boxed{x_1 = 1}$.
   - (E_2) est l'équation $x^2 + x = 1$ c'est-à-dire $x^2 + x - 1 = 0$. On calcule ici $\Delta = 5$ et l'équation a deux solutions $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Sachant $2 < \sqrt{5} < 3$, une seule de ces solutions est bien dans $[0,1]$ (l'autre est en fait négative). Donc $\boxed{x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

3. Il s'agit de calculer $f_n(\frac{1}{2})$ pour pouvoir placer $\frac{1}{2}$ sur le tableau de variations de f_n. Or
$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \tag{19}$$
   Pour s'en sortir il faut voir cela comme la somme d'une suite géométrique :
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \tag{20}$$

(c'est bien connu : manger une demi pizza, plus un quart, plus un huitième… il reste un huitième). On a alors $\boxed{f_n(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^n} < 0}$.

x	0		$\frac{1}{2}$		x_n		1
$f_n'(x)$				$+$			
$f_n(x)$	-1	$\nearrow$	$f_n(\frac{1}{2})$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$n-1$

(21)

D'après le tableau de variations, cela signifie que $\boxed{x_n \geqslant \frac{1}{2}}$. La démonstration est par l'absurde, si on avait $\frac{1}{2} < x_n$ alors en appliquant f_n strictement croissante on aurait $f_n(\frac{1}{2}) < 0$.

4. On sait que $f_n(x_n) = 0$. Il s'agit d'étudier le signe de $f_n(x_{n+1})$, ce qui permettra de placer x_{n+1} sur le tableau de variations de f_n. Or

$$f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n-1} + \cdots + x_{n+1}^2 + x_{n+1} - 1 \tag{22}$$

et on sait par définition $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ c'est-à-dire

$$0 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + \cdots + x_{n+1}^2 + x_{n+1} - 1 \tag{23}$$

Mais la différence de ces deux lignes donne directement $f_n(x_{n+1}) - 0 = -x_{n+1}^{n+1}$. Comme $x_{n+1} \in [0, 1]$, on en déduit $\boxed{f_n(x_{n+1}) \leqslant 0}$. D'après le tableau de variations, et le même raisonnement qu'à la question précédente, on en déduit $x_{n+1} \leqslant x_n$:

x	0		$\frac{1}{2}$		x_{n+1}		x_n		1
$f_n'(x)$					$+$				
$f_n(x)$	-1	$\nearrow$	$f_n(\frac{1}{2})$	$\nearrow$	$f_n(x_{n+1})$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$n-1$

(24)

Donc $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante}}$.

5. Attention… On sait que $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, il n'est donc pas du tout automatique que $\lim_{n\to+\infty} x_n^n$ donne 0, et même en sachant $x_n < 1$. En cas de doute : passer par l'exponentielle, qui nous dit $x_n^n = \exp(n\ln(x_n))$. Dans le produit $n\ln(x_n)$ le terme n tend vers $+\infty$, et $\ln(x_n) \leqslant 0$. Il s'agit d'être bien certain que le produit va bien tendre vers $-\infty$.

   On peut pour cela utiliser la décroissance de la suite : alors pour tout $n \geqslant 2$, $x_n \leqslant x_2$ donc $\ln(x_n) \leqslant \ln(x_2)$ qui est bien un nombre strictement négatif, puisqu'on a déjà calculé $x_2 < 1$. Alors $n\ln(x_n) \leqslant n\ln(x_2)$, ce terme de droite tendant sans ambigüité vers $-\infty$. Ainsi par le « gros gendarme en $-\infty$ » on déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(x_n) = -\infty}$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0}$.

6. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$. Par le théorème de convergence monotone, on en déduit que $\boxed{(x_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers une limite } \ell \geqslant \frac{1}{2}}$ (attention : le théorème ne dit pas que la limite est $\frac{1}{2}$, et la question précédente ne conclut rien du tout). Comme la suite est décroissante, la limite est aussi inférieure à $x_1 = 1$, et à $x_2 < 1$.

   Pour passer à la limite, il est nécessaire de ré-écrire notre équation à l'aide de la somme des termes d'une suite géométrique : pour $x \neq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} = \frac{x(1-x^n)}{1-x} \tag{25}$$

   On a alors pour tout $n \geqslant 2$ (auquel cas $x_n < 1$) :

$$\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n} = 1 \tag{26}$$

Passant à la limite pour $n \to +\infty$ et utilisant la question précédente, la limite ℓ doit vérifier

$$\frac{\ell}{1-\ell} = 1 \tag{27}$$

d'où on tire $\boxed{\ell = \frac{1}{2}}$. C'est bien cohérent avec tout ce qu'on sait…

Conclusion : $\boxed{(x_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } \frac{1}{2}}$.

Problème 2

1. f' est égale à la composée de f (dérivable) et de $x \mapsto \frac{1}{x}$, donc est encore dérivable sur $]0, +\infty[$. Avec la dérivée d'une composée on trouve

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x) \tag{28}$$

Passant le x^2 à gauche (c'est une équivalence, tout est sur $]0, +\infty[$ c'est bien $\boxed{x^2 f''(x) + f(x) = 0}$ soit l'équation différentielle $x^2 y'' + y = 0$ pour f.

2. z est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme une composée, et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) = e^t f'(e^t) = e^t f(e^{-t}) \tag{29}$$

à cause de la relation $f'(x) = f(\frac{1}{x})$ et $\frac{1}{e^t} = e^{-t}$.
Alors z' apparait encore dérivable, comme composée et produit, et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) = e^t f(e^{-t}) + e^t \times -e^{-t} f'(e^{-t}) = e^t f(e^{-t}) + f'(e^{-t}) = e^t f(e^{-t}) + f(e^t) \tag{30}$$

Formons alors $z'' - z' + z$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) - z'(t) + z(t) = \Big(e^t f(e^{-t}) + f(e^t)\Big) - e^t f(e^{-t}) + f(e^t) = 0 \tag{31}$$

On a donc bien $\boxed{z'' - z' + z = 0}$ ce qui est l'équation différentielle (linéaire et à coefficients constants, sur $\mathbb{R}$ tout entier) $y'' - y' + y = 0$ pour $t \mapsto z(t)$.

3. (G) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. L'équation caractéristique, d'inconnue $r \in \mathbb{C}$, est $r^2 - r + 1 = 0$. On calcule $\Delta = 3$, deux racines complexes conjuguées $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. On sait alors (théorème du cours) que l'ensemble des solutions de (G) est

$$\left\{ t \mapsto e^{\frac{1}{2}t} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \right) \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \tag{32}$$

4. La fonction z étant une solution de l'équation (G), elle est de la forme ci-dessus. Or par définition $\forall x > 0$, $f(x) = z(\ln(x))$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = e^{\frac{1}{2}\ln(x)} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right) \right) \tag{33}$$

N'oubliant pas $e^{\frac{1}{2}\ln(x)} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, on trouve bien

$$\forall x > 0, \quad \boxed{f(x) = \sqrt{x} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right) \right)} \tag{34}$$

5. Avec l'équation (E) de départ, $f'(1) = f(1)$ qui est égal ci-dessus à $\boxed{f'(1) = \lambda}$ (puisque $\ln(1) = 0$, $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$). Mais en dérivant d'expression ci-dessus on trouve (il serait plus judicieux d'utiliser z)

$$f'(x) = \sqrt{x} \times \left(-\frac{\sqrt{3}\lambda}{2x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \frac{\sqrt{3}\mu}{2x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right) \tag{35}$$

Alors $\boxed{f'(1) = \frac{\sqrt{3}\mu}{2} + \frac{\lambda}{2}}$. De l'égalité entre ces deux expressions on tire $\boxed{\lambda = \sqrt{3}\mu}$.

6. Éliminant par exemple λ, on tire alors

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \mu\sqrt{x}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right) \tag{36}$$

Développant avec la formule de trigonométrie pour l'addition du cosinus, avec $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, on trouve d'autre part

$$\forall x > 0, \quad \sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right) \tag{37}$$

On voit qu'en posant $\boxed{C = 2\mu}$ on a bien

$$\forall x > 0, \quad \boxed{f(x) = C\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right)} \tag{38}$$

Mais, de la façon dont nous avons raisonné, il faut vérifier que toutes ces fonctions sont bien solution de notre équation (E) de départ ! Mais cela découle plus ou moins des calculs précédents : soit $C \in \mathbb{R}$, soit la fonction

$$y : x \longmapsto C\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right) \tag{39}$$

alors on sait déjà que

$$\forall x > 0, \quad \boxed{y(x) = \frac{C}{2}\sqrt{x}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right)} \tag{40}$$

et que

$$\forall x > 0, \quad y'(x) = \frac{C}{2}\sqrt{x} \times \left(-\frac{3}{2x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right) + \frac{C}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right) \tag{41}$$

qui est aussi, sachant $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (ce qui permet de regrouper les fonctions trigonométriques entre elles)

$$\boxed{y'(x) = \frac{C}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right)} \tag{42}$$

Sachant $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$, et avec la parité du cosinus et du sinus, il est alors facile de conclure des deux égalités précédemment encadrées $\boxed{y'(x) = y(\frac{1}{x})}$.

Conclusion : $\boxed{\text{ce sont bien } \textbf{toutes} \text{ les fonctions vérifiant } (E)}$.

7. Il suffit de trouver la bonne valeur de C.
   Analyse : si une telle fonction existe alors elle s'écrit sous la forme ci-dessus et alors $y(1) = C\cos(-\frac{\pi}{6}) = C\frac{\sqrt{3}}{2}$. Et si $y(1) = \sqrt{3}$ alors $C = 2$.
   Synthèse : on a donc une unique solution obtenue avec $\boxed{C = 2}$ et c'est

$$\forall x > 0, \quad \boxed{y(x) = 2\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right)} \tag{43}$$

Exercice 2

1. Il s'agit bien de deux équations cartésiennes de plan (tous les coefficients en sont pas en même temps nuls). Leur intersection est donnée par le système linéaire

$$(S) : \begin{cases} mx + 6y - 4z + 2 = 0 \\ x + (m+1)y - mz + 1 = 0 \end{cases} \tag{44}$$

   Pour l'étudier on peut inverser les deux lignes et échelonner un coup $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$:

$$(S) \iff \begin{cases} x + (m+1)y - mz + 1 = 0 \\ (6 - m(m+1))y - (4 - m^2)z + (2 - m) = 0 \end{cases} \tag{45}$$

   Le coefficient devant y est $-(m^2 + m - 6)$ qui se factorise en $-(m+3)(m-2)$. Il faut donc distinguer divers cas :

   - Cas $m = 2$: le système est équivalent à

$$(S) \iff \begin{cases} x + 3y - 2z + 1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \tag{46}$$

     Il est équivalent à sa première ligne : $\boxed{\text{les deux plans sont confondus}}$ (l'intersection est un plan).
   - Cas $m = -3$: le système est équivalent à

$$(S) \iff \begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 5z + 5 = 0 \end{cases} \tag{47}$$

     Il est de $\boxed{\text{rang } 2}$: l'intersection est sans aucun doute une droite ; ici y est libre, on pose $y = t \in \mathbb{R}$ et on aboutit à

$$(S) \iff \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \tag{48}$$

     soit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

     On reconnait la $\boxed{\text{droite passant par le point } (2, 0, -1) \text{ et dirigée par le vecteur } (2, 1, 0)}$.
   - Cas $m \neq 2, -3$: le système est de $\boxed{\text{rang } 2}$, l'intersection est encore une droite, cette fois on peut prendre z comme variable libre $z = t \in \mathbb{R}$, le système est équivalent à (factorisant aussi $m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$) après simplification

$$(S) \iff \begin{cases} x = -\frac{2}{m+3} - \frac{2}{m+3}t \\ y = -\frac{1}{m+3} - \frac{m+2}{m+3}t \\ z = t \end{cases} \tag{50}$$

soit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{m+3} \\ -\frac{1}{m+3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{2}{m+3} \\ -\frac{m+2}{m+3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{51}$$

C'est bien une $\boxed{\text{droite}}$ paramétrée avec le point et le vecteur ci-dessus…

2. (a) $\mathcal{D}$ est dirigée par $\boxed{\vec{u} = \overrightarrow{CD} = (-3, 2, 1)}$.

   Pour $\mathcal{D}'$ on reconnait un vecteur directeur $\boxed{\vec{v} = (3, -2, -1)}$.

   Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont $\boxed{\text{colinéaires}}$ (car $\vec{v} = -\vec{u}$) donc $\boxed{\text{les droites sont parallèles}}$.

   (b) Effectivement, étant données deux droites parallèles (non confondues) de l'espace, il existe un unique plan les contenant…

   Nombreuses stratégies possibles (faire un dessin) : par exemple $\mathcal{D}$ a un point C et un vecteur directeur $\vec{u}$, qui sont donc un point et un premier vecteur directeur pour $\mathcal{P}$; un autre vecteur directeur va se trouver en reliant C à un point (quelconque) de $\mathcal{D}'$, justement $\mathcal{D}'$ passe par $A = (3, 2, 0)$, et $\overrightarrow{CA} = (2, 0, 1)$. Automatiquement comme A est en dehors de $\mathcal{D}$ alors $\overrightarrow{CA}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{CD}$. Donc $\mathcal{P}$ est le plan passant par C et dirigé par $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CA}$, c'est donc l'ensemble des $C + t\overrightarrow{CD} + s\overrightarrow{CA}$ pour $(t, s) \in \mathbb{R}^2$. Son paramétrage est :

$$\begin{cases} x = 1 - 3t + 2s \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t + s \end{cases} \quad ((t, s) \in \mathbb{R}^2) \tag{52}$$

   Voyant cela comme un système d'inconnue (t, s), on ré-écrit (on inverse les lignes et puis aussi les variables)

$$\begin{cases} s + t = z + 1 \\ 2t = y - 2 \\ 2s - 3t = x - 1 \end{cases} \tag{53}$$

   qu'on échelonne avec $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\begin{cases} s + t = z + 1 \\ 2t = y - 2 \\ -5t = (x - 1) - 2(z + 1) \end{cases} \tag{54}$$

   Dans tous les cas on trouve la condition de compatibilité (comparer $5L_2$ et $2L_3$) $\boxed{2x + 5y - 4z = 16}$. Ceci est l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$, on peut vérifier après coup qu'il contient bien C, D et A.

3. (a) Sans le vecteur normal : on doit déterminer deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{P}$, puis considérer le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   Avec le vecteur normal : on lit directement le vecteur $\vec{n} = (2, 1, -2)$ normal à $\mathcal{P}$. Donc $\mathcal{P}'$ est l'ensemble des points $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Écrivant $\overrightarrow{AM} = (x - 1, y, z - 2)$ on aboutit à $\boxed{2x + y - 2z + 2 = 0}$.

   (b) La droite $\mathcal{D}$ est colinéaire à $\vec{n}$ et passe par A. Donc c'est direct :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{55}$$

   (c) On remplace alors les coordonnées précédentes dans l'équation de $\mathcal{P}$, on trouve $9t + 1 = 0$ soit $\boxed{t = -\frac{1}{9}}$.

   On reporte, cela correspond au point $\boxed{H = (7/9, -1/9, 20/9)}$. Ce point H est le $\boxed{\text{projeté orthogonal de } A \text{ sur } \mathcal{P}}$: il appartient à $\mathcal{P}$, et comme $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$, il est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathcal{P}$.

   (d) On trouve $\boxed{AH = \frac{1}{3}}$. Une façon de faire est d'écrire que par construction $\overrightarrow{AH} = -\frac{1}{9}\vec{n}$, donc $AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \frac{1}{9}\|\vec{n}\|$ avec $\|\vec{n}\|^2 = 2^2 + 1^2 + 2^2 = 9$ donc $\|\vec{n}\| = 3$.

Exercice d'informatique

1. La syntaxe correcte est la `A2` : elle crée « à l'intérieur » une liste de longueur p, et elle répète ce procédé n fois, c'est donc une liste de n lignes toutes de longueur p.

   Mais, piège !!! La syntaxe `A4` est correcte aussi. Les noms des variables i et j n'ont aucun rôle ici, une matrice de taille (n, p) a n lignes et p colonnes peu importe si on les numérote par i ou j ou k…

2. On suppose que `C` est déjà carré. On a besoin d'une boucle sur un indice `j` des colonnes, et de calculer une somme.

```python
def somme_ligne(C, i):
    n = len(C)
    S = 0
    for j in range(n):
        S = S + C[i][j]
    return S
```

   De même :

```python
def somme_colonne(C, j):
    n = len(C)
    S = 0
    for i in range(n):
        S = S + C[i][j]
    return S
```

3. Si le carré est magique, alors la constante magique est la somme de n'importe laquelle des lignes (ou des colonnes). Il faut donc vérifier si toutes les lignes, et toutes les colonnes, ont la même somme. On quitte la fonction si on trouve une somme différente. Cela se traduit par deux boucles simples successives :

```python
def est_magique(C):
    n = len(C)
    # S est la constante magique possible
    S = somme_ligne(C, 0)
    for i in range(1, n):
        if somme_ligne(C, i) != S:
            return False
    for j in range(n):
        if somme_colonne(C, j) != S:
            return False
    return True
```

   Une double boucle est valable aussi, mais fait plus de calculs que nécessaire :

```python
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if somme_ligne(C, i) != somme_colonne(C, j):
                return False
```

   Elle compare la somme de chacune des lignes, à la somme de chacune des colonnes, *et donc des lignes et des colonnes entre elles* (si deux lignes i_1 et i_2 ont des sommes différentes, elles ne peuvent pas toutes les deux avoir la même somme qu'une colonne j).

4. Question qui aurait pu être dans le TP matrice, ici pour un carré… Il faut créer un tableau nul et le remplir.

```python
def transpose(C):
    n = len(C)
    T = [[0 for j in range(n)] for i in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            T[i][j] = C[j][i]
    return T
```

5. On fait une double boucle pour parcourir le carré ; on sait qu'on peut s'arrêter et renvoyer `True` si le coefficient qu'on visite est égal à `x`, sinon on renvoie `False` à la fin de la boucle.

```
def est_présent(C, x):
    n = len(C)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if C[i][j] == x:
                return True
    return False
```

6. On teste la fonction précédente sur chacun des nombres entre 1 et n^2. Comme il y a n^2 nombres dans n^2 cases, il suffit que chacun apparaisse au moins une fois, pour qu'ils apparaissent tous une et une seule fois.

```
def est_parfait(C):
    n = len(C)
    for x in range(1, n**2+1):
        if not est_présent(C, x):
            return False
    return True
```

Si on ne supposait pas que `C` était déjà un carré magique, il faudrait rajouter au tout début de la fonction

```
    if not est_magique(C):
        return False
```

7. Dans un tel carré, la somme totale de tous les coefficients est la somme de tous les entiers entre 1 et n^2, qui est égale à $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$. Mais si on la calcule en sommant d'abord en calculant le total de chaque ligne, puis la somme des n totaux, on a bien sûr n fois la constante magique. Donc la constante magique est $\frac{1}{n} \times \frac{n^2(n^2+1)}{2}$ c'est-à-dire $\boxed{\frac{n(n^2+1)}{2}}$.