DS 6 Mathématiques
Correction

Problème d'informatique

1. Étude d'exemples

1. On sait que `"AAGC"` est la plus longue sous-chaine commune, elle est de longueur 4. Une sous-chaine commune aurait pour longueur maximale 6. On voit que, en testant parmi les sous-chaines de `"AATGCG"` et à quel caractères elles démarrent :
   - Si on prend `"AA"`, alors on ne peut prendre plus que `"GC"` (donc sous-chaine `"AACG"`).
   - Si on prend `"AT"`, alors là aussi on ne peut plus prendre que `"GC"` (sous-chaine `"ATGC"`.
   - Si on démarre au `T`, on peut prendre encore `"GC"` mais pas plus, donc on a une sous-chaine de longueur 3.
   - Si on démarre après alors la chaine sera seulement de longueur au plus 3, on a en fait `"GC"`.
2. On trouve aussi la chaine `"AAGC"`.
3. La chaine `"CTG"` a assez peu de sous-chaines... De plus un caractère seul est déjà une sous-chaine, et la chaine tout entière `"CTG"` n'est pas une sous-chaine de `"TCGTA"`. Il faut donc les chercher parmi les sous-chaines de longueur 2 de `"CTG"`, et on trouve les trois : `"CT"`, `"TG"`, et `"CG"`.

2. Fonctions Python préliminaires

4. Standard (mais éventuellement utile pour la suite).

```python
def maximum(p, q):
    if p >= q:
        return p
    else:
        return q
```

5. La méthode pour tester ce genre de propriété est censée être bien connue maintenant : il faut tester la condition contraire dans une boucle. Si elle est réalisée alors on est sûr que ce n'est pas une séquence ADN valide, sinon il faut aller au bout de la boucle. Attention, la négation de

```python
S[i] == "A" or S[i] == "C" or S[i] == "G" or S[i] == "T"
```

est

```python
S[i] != "A" and S[i] != "C" and S[i] != "G" and S[i] != "T"
```

C'est la loi de Morgan !!!

```python
def est_ADN(S):
    for i in range(len(S)):
        if S[i] != "A" and S[i] != "C" and S[i] != "G" and S[i] != "T":
            return False
    return True
```

6. Ici on travaille avec un dictionnaire de 4 clés fixes, il n'y a donc pas le problème de tester si une clé est bien présente ni d'itérer sur les clés (syntaxes qui auraient dû être rappelées dans le sujet sinon). On peut donc initialiser un dictionnaire avec 4 clés toutes de valeur 0.

```python
def compte(S):
    d = {"A": 0, "C": 0, "G": 0, "T": 0}
    for i in range(len(S)):
        if S[i] == "A":
            d["A"] = d["A"] + 1
        elif S[i] == "C":
            d["C"] = d["C"] + 1
        elif S[i] == "G":
            d["G"] = d["G"] + 1
        elif S[i] == "T":
            d["T"] = d["T"] + 1
    return d
```

Un peu plus élégant, on peut remplacer toutes ces conditions d'un coup par

```python
    for i in range(len(S)):
        d[S[i]] = d[S[i]] + 1
```

puisqu'en lisant le caractère `S[i]` c'est bien la clé `S[i]` de `d` qu'on incrémente.

7. Il suffit de traduire en une fonction récursive la description proposée, même si d'un point de vue pratique la fonction ne sera pas très efficace.

```python
def est_sous_chaine(C, S):
    k = len(C)
    if k == 0:
        return True
    else:
        n = len(S)
        # parcourir tous les i : indices dans S
        for i in range(n):
            if C[0] == S[i]:
                if est_sous_chaine(C[1:k], S[i+1:n]):
                    # un tel i existe : c'est bon
                    return True
        # un tel i n'existe pas
        return False
```

Le premier test est la même chose que `if C == ""`; avec la syntaxe des tranches on peut écrire directement `C[1:]` et `S[i+1:]` ce qui se lit comme « la sous-chaine des éléments à partir de l'indice 1 (resp. $i+1$) » sans risquer de s'embrouiller sur la borne du dessus. On peut vérifier que cela est bien correct dans tous les cas : si i était le dernier indice de `S`, alors `S[i+1:]` serait vide, et dans l'appel récursive la boucle `for` sera vide et la fonction renverra `False`, il n'y a donc pas de cas à séparer si la chaine `S` est vide.

3. Résolution par programmation dynamique

8. Une chaine vide est toujours une sous-chaine d'une autre. Dans le cas où S ou T est vide (cas $i = 0$ ou $j = 0$) alors la plus longue sous-chaine commune est de longueur 0. Cela traite les cas $\ell_{i,0}$ et $\ell_{0,j}$.

   Sinon, alors il peut se passer deux choses pour les chaines $S = a_0 \dots a_{i-1}$ et $T = b_0 \dots b_{j-1}$. Ou bien les deux derniers caractères sont égaux ($a_{i-1} = b_{j-1}$), dans ce cas toute sous-chaine commune à $a_0 \dots a_{i-2}$ et à $b_0 \dots b_{j-2}$ (enlever le dernier caractère des deux) peut être prolongée en lui remettant ce dernier caractère. La longueur maximale augmente donc de 1. Ou bien les deux derniers caractères sont distincts, dans ce cas on peut s'intéresser aux sous-chaines communes à $a_0 \dots a_{i-1}$ et à $b_0 \dots a_{j-2}$ (enlever le dernier caractère de T), ainsi qu'aux sous-chaines communes à $a_0 \dots a_{i-2}$ et à $b_0 \dots b_{j-1}$ (enlever le dernier caractère de S), ce sont alors bien des sous-chaines communes à S et T entiers, et on peut prendre le maximum de leurs longueurs. Alors on est certain que rajouter ce dernier caractère ne fera pas augmenter la longueur maximale des sous-chaines communes.

9. On trace un tableau et on le remplit, soit en appliquant soigneusement l'algorithme proposé, soit en trichant

un peu et en cherchant à chaque fois les sous-chaines communes.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline i\diagdown j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \tag{1}$$

Ceci démontre que la longueur maximale est bien 2.

10. On initialise un tableau rempli de zéros « comme d'habitude » et on le remplit avec une double boucle (peu importe l'ordre), on renvoie à la fin son coefficient en bas à droite. Cette question est traitable même si on ne sait pas bien justifier les relations d'au-dessus, mais il suffit de les traduire dans le style des doubles boucles Python. Attention, les indices utilisés ici sont bien alignés avec la convention informatique, mais le tableau est bien de dimensions $(n+1, p+1)$. On peut utiliser la fonction `maximum` de la question 4.

```python
def longueur_plus_longue_sous_chaine(S, T):
    n = len(S)
    p = len(T)
    L = [[0 for j in range(p+1)] for i in range(n+1)]
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(1, p+1):
            # traduction exacte de la formulation mathématique
            if S[i-1] == T[i-1]:
                L[i][j] = 1 + L[i-1][j-1]
            else:
                L[i][j] = maximum(L[i-1][j], L[i][j-1])
    return L[n][p]
```

11. On propose de calculer un tableau entier de chaines de caractères, appelons-le `M`, tel que `M[i][j]` est *une* sous-chaine commune de longueur maximale à $a_0 \dots a_{i-1}$ et à $b_0 \dots b_{j-1}$. Il faut alors traduire les relations de la question précédente en opérations sur les chaines. Au départ, `M` est une liste de listes de chaines vides ; on peut utiliser l'opération `+` pour concaténer des chaines (cas où le dernier caractère est commun).

```python
def plus_longue_sous_chaine(S, T):
    n = len(S)
    p = len(T)
    M = [["" for j in range(p+1)] for i in range(n+1)]
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(1, p+1):
            if S[i-1] == T[i-1]:
                # on prend la chaine commune, on y ajoute le dernier caractère commun
                M[i][j] = M[i-1][j-1] + S[i-1]
            else:
                # on prend l'une des deux plus longues sous-chaines
                if len(M[i-1][j]) >= len(M[i][j-1]):
                    M[i][j] = M[i-1][j]
                else:
                    M[i][j] = M[i][j-1]
    return M
```

Problème 1

1. En dérivant la première équation, on trouve $\forall t \in \mathbb{R}$

$$x''(t) = x'(t) + 2y'(t) + 10t \tag{2}$$

Remplaçant par y' donné dans la deuxième équation alors

$$x''(t) = x'(t) + 2(3y(t) - x(t) + \cos(t)) + 10t \tag{3}$$
$$= x'(t) + 6y(t) - 2x(t) + 2\cos(t) + 10t \tag{4}$$

Puis déduisant de la première équation

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(x'(t) - x(t) - 5t^2\right) \tag{5}$$

on trouve alors

$$x''(t) = x'(t) + 3\left(x'(t) - x(t) - 5t^2\right) - 2x(t) + 2\cos(t) + 10t \tag{6}$$
$$= 4x'(t) - 5x(t) - 15t^2 + 10t + 2\cos(t) \tag{7}$$

ce qui se ré-écrit aussi

$$x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = -15t^2 + 10t + 2\cos(t) \tag{8}$$

Le polynôme est $P(t) = -15t^2 + 10t$.

2. L'équation homogène associée est (H) : $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0$. L'équation caractéristique est (C) : $q^2 - 4q + 5 =$. Ici $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$. Les solutions sont $q = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$. Les solutions de (H) sont donc toutes les fonctions

$$t \mapsto x_H(t) = e^{2t}(\lambda\cos(t) + \mu\sin(t)), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \tag{9}$$

3. L'équation est (E_1) : $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = -15t^2 + 10t$. Il est assez raisonnable de chercher la solution particulière avec un polynôme de degré 2 comme P. En effet si une telle solution existe, remplacer à gauche x par un polynôme de degré 1 ne fera jamais apparaitre par magie le terme t^2 ; à l'inverse si on introduit un terme t^3, alors x'' et x' seront de degré strictement inférieur et il y aura un terme de degré 3 à gauche qu'on ne pourra pas égaler à droite.

Bref : analyse. Soit $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$. Posons $x_{P,1} : t \mapsto At^2 + Bt + C$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $x'_{P,1}(t) = 2At + B$ et $x''_{P,1}(t) = 2A$. Ainsi $x_{P,1}$ est solution de (E_1) si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad (2A) - 4(2At + B) + 5(At^2 + Bt + C) = -15t^2 + 10t \tag{10}$$
$$\iff 2A - 8At - 4B + 5At^2 + 5Bt + 5C = -15t^2 + 10t \tag{11}$$
$$\iff (5A)t^2 + (-8A + 5B)t + (2A - 4B + 5C) = -15t^2 + 10t \tag{12}$$

On cherche alors (A, B, C) tel que

$$\begin{cases} 5A = -15 \\ -8A + 5B = 10 \\ 2A - 4B + 5C = 0 \end{cases} \tag{13}$$

d'où on tire successivement $A = -3$ puis $5B = -14$ donc $B = -\frac{14}{5}$ et enfin $5C = 6 - \frac{56}{5} = -\frac{26}{5}$ donc $C = -\frac{26}{25}$.

Synthèse : on pose $x_{P,1} : t \mapsto -3t^2 - \frac{14}{5}t - \frac{26}{25}$, et les calculs montrent que ceci est une solution particulière de (E_1).

4. Même méthode. Analyse : soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ (ce ne sont pas les mêmes qu'avant). On pose $x_{P,2} : t \mapsto A\cos(t) + B\sin(t)$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $x'_{P,2}(t) = -A\sin(t) + B\cos(t)$ et $x''_{P,2}(t) = -A\cos(t) - B\sin(t)$. Ceci est solution de (E_2) si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad (-A\cos(t) - B\sin(t)) - 4(-A\sin(t) + B\cos(t)) + 5(A\cos(t) + B\sin(t)) = 2\cos(t) \tag{14}$$
$$\iff -A\cos(t) - B\sin(t) + 4A\sin(t) - 4B\cos(t) + 5A\cos(t) + 5B\sin(t) = 2\cos(t) \tag{15}$$
$$\iff (4A - 4B)\cos(t) + (4A + 4B)\sin(t) = 2\cos(t) \tag{16}$$

On cherche donc (A, B) tel que

$$\begin{cases} 4A - 4A = 2 \\ 4A + 4B = 0 \end{cases} \tag{17}$$

d'où on tire rapidement $B = -A$ et $4A = 1$, soit $A = \frac{1}{4}$ et $B = -\frac{1}{4}$.

Synthèse : on pose $x_{P,2} : t \mapsto \frac{1}{4}\cos(t) - \frac{1}{4}\sin(t)$. Les calculs montrent que ceci est bien une solution de (E_2).

5. En reprenant les calculs, on voit que former $x_{P,1} + x_{P,2}$ sera bien une solution particulière à l'équation (E) tout entière. L'ensemble des solutions de (E) est donc l'ensemble des

$$x : t \mapsto e^{2t}(\lambda\cos(t) + \mu\sin(t)) - 3t^2 - \frac{14}{5}t - \frac{26}{25} + \frac{1}{4}\cos(t) - \frac{1}{4}\sin(t), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \tag{18}$$

Pour trouver y on peut reprendre la même méthode, ou alors déduire simplement de la première équation $y(t) = \frac{1}{2}\left(x'(t) - x(t) - 5t^2\right)$ qui donne

$$y(t) = \frac{1}{2}\Bigg[\Big(2\lambda e^{2t}\cos(t) - \lambda e^{2t}\sin(t) + 2\mu e^{2t}\sin(t) + \mu e^{2t}\cos(t) - 6t - \frac{14}{5} - \frac{1}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\cos(t)\Big) - \Big(e^{2t}(\lambda\cos(t) + \mu\sin(t)) - 3t^2 - \frac{14}{5}t - \frac{26}{25} + \frac{1}{4}\cos(t) - \frac{1}{4}\sin(t)\Big) - 5t^2\Bigg] \tag{19}$$

soit, en regroupant tout

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[(\lambda + \mu)e^{2t}\cos(t) + (-\lambda + \mu)e^{2t}\sin(t) - 2t^2 - \frac{16}{5}t - \frac{271}{100} - \frac{1}{2}\cos(t)\right], \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \tag{20}$$

Problème 2

1. Soit $k \geqslant 1$. Pour $x \in [k, k+1]$ on a $k \leqslant x \leqslant k+1$ donc $k^2 \leqslant x^2 \leqslant (k+1)^2$ donc $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$. Intégrant cette inégalité, on trouve

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \tag{21}$$

mais le membre de gauche est l'intégrale d'une fonction constante sur un intervalle de longueur 1, donc est directement égal à $1 \times \frac{1}{(k+1)^2}$, et cela donne l'inégalité voulue.

2. À droite on calcule aisément

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \Big[-\frac{1}{x}\Big]_k^{k+1} = -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \tag{22}$$

On a alors démontré la majoration

$$\forall k \geqslant 1, \quad \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \tag{23}$$

Sommons ces inégalités de pour k de 1 à $n-1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \tag{24}$$

À droite, il s'agit d'une somme téléscopique

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \tag{25}$$

et à gauche on fait le changement d'indice $j = k+1$, on trouve alors

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2} \leqslant 1 - \frac{1}{n} \tag{26}$$

(si on somme l'inégalité (23) de 1 à n, on obtient cette inégalité au rang $n+1$). Mais la somme de gauche est précisément $A_n - 1$ car il manque le terme pour $j = 1$. En conclusion on a bien démontré

$$-1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leqslant 1 - \frac{1}{n} \tag{27}$$

d'où $A_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.
Mais la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, car $A_{n+1} - A_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$, et on vient de montrer qu'elle est majorée, par 2 (on oublie le $-\frac{1}{n}$, le majorant ne doit pas dépendre de n). D'après le théorème de convergence monotone, on en déduite que (A_n) converge vers une limite α. On sait que $\alpha \leqslant 2$. Comme la convergence est en croissant, on sait aussi que $\alpha \geqslant A_1 = 1$, en particulier $\alpha > 0$.

Remarque 1. Il est connu que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{28}$$

(la démonstration ne découle pas des méthodes présentées ici).

3. On fixe $n \geqslant 1$, puis on prend $j \geqslant 1$. Alors sous la somme $n - j + 1 \leqslant k \leqslant n + j$, d'où

$$\frac{1}{n+j} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n-j+1} \tag{29}$$

Sommons l'inégalité :

$$\sum_{k=n-j+1}^{n+j} \frac{1}{n+j} \leqslant \sum_{k=n-j+1}^{n+j} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=n-j+1}^{n+j} \frac{1}{n-j+1} \tag{30}$$

Mais les deux sommes de gauche et de droite sont constantes par rapport à k, donc se calculent directement (nombre de termes $\times$ valeur), le nombre de termes est $2j$.

$$\frac{2j}{n+j} \leqslant \sum_{k=n-j+1}^{n+j} \frac{1}{k} \leqslant \frac{2j}{n-j+1} \tag{31}$$

Mais pour $n \to +\infty$, les deux morceaux encadrant la somme tendent vers 0. Rien de subtil car j est fixé, donc $2j$ aussi, et sous la fraction $n + j \to +\infty$ et $n - j + 1 \to +\infty$, donc les inverses tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la somme du milieu tend vers 0 pour $n \to +\infty$.

4. (a) Simple calcul de mise au même dénominateur : pour $i \neq j$

$$\frac{1}{i-j} - \frac{1}{i+j} = \frac{(i+j)-(i-j)}{(i-j)(i+j)} = \frac{2j}{i^2-j^2} = 2ju_{i,j} \tag{32}$$

(b) Avec $j \geqslant 1$ fixé puis $n > 2j$ fixé aussi, on a d'abord

$$2j\sum_{i=1}^{n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} 2ju_{i,j} \tag{33}$$

mais pour appliquer le résultat précédent il faut d'abord séparer la somme selon $i < j$ ou $i > j$:

$$\sum_{i=1}^{n} 2ju_{i,j} = \underbrace{\sum_{i=1}^{j-1} 2ju_{i,j}}_{i<j} + \underbrace{2iu_{i,i}}_{i=j} + \underbrace{\sum_{i=j+1}^{n} 2ju_{i,j}}_{i>j} \tag{34}$$

soit (le terme $u_{i,i} = 0$)

$$\sum_{i=1}^{n} 2ju_{i,j} = \sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{1}{i-j} - \frac{1}{i+j}\right) + \sum_{i=j+1}^{n}\left(\frac{1}{i-j} - \frac{1}{i+j}\right) \tag{35}$$

mais il suffit alors de séparer les sommes :

$$\sum_{i=1}^{n} 2ju_{i,j} = \sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i-j} - \sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i+j} + \sum_{i=j+1}^{n}\frac{1}{i-j} - \sum_{i=j+1}^{n}\frac{1}{i+j} \tag{36}$$

Remarquons qu'on ne divise certainement pas par 0 : dans la première somme $i < j$ donc $i - j < 0$, dans la troisième $i - j > 0$.

(c) Les changements d'indices sont tout simplement $k = i - j$ ou bien $k = i + j$, et c'est la borne i des sommes à changer :

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i-j} = \sum_{k=1-j}^{-1} \frac{1}{k} \tag{37}$$

$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i+j} = \sum_{k=j+1}^{2j-1} \frac{1}{k} \tag{38}$$

$$\sigma_3 = \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{i-j} = \sum_{k=1}^{n-j} \frac{1}{k} \tag{39}$$

$$\sigma_4 = \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{i+j} = \sum_{k=2j+1}^{n+j} \frac{1}{k} \tag{40}$$

(d) Il s'agit de réunir les sommes précédentes, nommons ceci B, et de regarder avant tout les bornes (les $1/k$ sous les sommes ne bougeront plus) :

$$B = \sum_{k=1-j}^{-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=j+1}^{2j-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-j} \frac{1}{k} - \sum_{k=2j+1}^{n+j} \frac{1}{k} \tag{41}$$

La première d'entre elle, quitte à changer k en $-k$, s'écrit aussi $\sigma_1 = -\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}$. Elle s'annule avec un bout de la troisième somme :

$$\sigma_1 + \sigma_3 = -\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-j} \frac{1}{k} = \sum_{k=j}^{n-j} \frac{1}{k} \tag{42}$$

(l'hypothèse $n > 2j$ assure que c'est bien $n - j \geqslant j - 1$). Les deux autres se regroupent à peu près entre elles : k varie de $j+1$ à $2j-1$ puis de $2j+1$ à $n+j$, il manque donc uniquement le terme $k = 2j$ pour former la somme de $j+1$ à $n+j$:

$$-\sigma_3 - \sigma_4 = -\left(\sum_{k=j+1}^{2j-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2j+1}^{n+j} \frac{1}{k} \right) = -\left(\sum_{k=j+1}^{n+j} \frac{1}{k} - \frac{1}{2j} \right) \tag{43}$$

En résumé

$$B = \sum_{k=j}^{n-j} \frac{1}{k} - \sum_{k=j+1}^{n+j} \frac{1}{k} + \frac{1}{2j} \tag{44}$$

Mais là encore une partie de ces sommes s'annule car elles ont des indices en commun, ceux pour k entre $j+1$ et $n-j$:

$$B = \left(\underbrace{\frac{1}{j}}_{k=j} + \sum_{k=j+1}^{n-j} \frac{1}{k} \right) - \left(\sum_{k=j+1}^{n-j} \frac{1}{k} + \sum_{k=n-j+1}^{n+j} \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{2j} \tag{45}$$

Finalement il reste bien

$$B = \frac{1}{j} - \sum_{k=n-j+1}^{n+j} \frac{1}{k} + \frac{1}{2j} \tag{46}$$

soit

$$2j \sum_{i=1}^{n} u_{i,j} = \frac{3}{2j} - \sum_{k=n-j+1}^{n+j} \frac{1}{k} \tag{47}$$

5. Les questions suivantes ne dépendent plus beaucoup de ce calcul de somme, qu'on pouvait aussi sauter… On déduit de tout ceci

$$\sum_{i=1}^{n} u_{i,j} = \frac{3}{4j^2} - \frac{1}{2j} \sum_{k=n-j+1}^{n+j} \frac{1}{k} \tag{48}$$

puis, sommons sur j (on avait fixé $j \geqslant 1$) et pour n qu'on peut prendre suffisamment grand (puisqu'on le fera tendre vers $+\infty$) tel que $n > 2j$ soit vrai pour tous les j de 1 à p (donc $n > 2p$)

$$S_{n,p} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \frac{3}{4j^2} - \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{1}{2j}\sum_{k=n-j+1}^{n+j}\frac{1}{k}\right) \tag{49}$$

soit

$$S_{n,p} = \frac{3}{4}\underbrace{\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j^2}}_{A_p} - \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{1}{2j}\underbrace{\sum_{k=n-j+1}^{n+j}\frac{1}{k}}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 0}\right) \tag{50}$$

Faisant tendre $n \to +\infty$, on reconnait la somme de la question 3 qui tend vers 0. Mais — et c'est là un point subtil et en même temps crucial de la preuve — on la multiplie par $\frac{1}{2j}$ et on somme un nombre **fini** de termes (p est fixé et ne tend pas encore vers $+\infty$), donc la limite de tout le terme $\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{2j}\sum_{k=n-j+1}^{n+j}\frac{1}{k}$ est 0 aussi, pour $n \to +\infty$.

On obtient donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n,p} = \frac{3}{4}A_p \tag{51}$$

et donc

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} S_{n,p}\right) = \frac{3}{4}\alpha \tag{52}$$

6. Sans tout recommencer, mais à cause de $u_{j,i} = -u_{i,j}$ et en intervertissant les sommes doubles, on trouve

$$S_{n,p} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} u_{i,j} \tag{53}$$

$$= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} -u_{j,i} \tag{54}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} -u_{j,i} \tag{55}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} u_{j,i} \tag{56}$$

mais on peut toujours renommer les indices i en j et réciproquement, donc

$$S_{n,p} = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} u_{i,j} \tag{57}$$

On est donc ramené au cas précédent, mais en échangeant les noms n et p : on trouve d'abord, pour n fixé

$$\lim_{p\to+\infty} S_{n,p} = -\lim_{p\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} u_{i,j} = -\frac{3}{4}A_n \tag{58}$$

puis

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} S_{n,p}\right) = -\frac{3}{4}\alpha \tag{59}$$

Comme $\alpha > 0$ on a bien $\frac{3}{4}\alpha \neq -\frac{3}{4}\alpha$, en conclusion on a bien démontré

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} S_{n,p}\right) \neq \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} S_{n,p}\right) \tag{60}$$

7. Il est facile de remarquer que $\forall n \geqslant 1$, $S_{n,n} = 0$: les termes pour $i = j$ sont nuls et les termes pour $i < j$ sont opposés à ceux pour $i > j$. Pour l'écrire formellement il faut couper la somme :

$$\begin{aligned} S_{n,n} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{i,j} && (61)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} u_{i,j} + u_{i,i} + \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j}\right) && (62)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} u_{i,j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j} && (63) \end{aligned}$$

puis échanger l'ordre de sommation à droite :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j} \tag{64}$$

Cette somme est la même que (renommer les indices i et j) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} u_{j,i}$, qui est donc opposée à $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} u_{i,j}$ et la somme des deux donne 0.

Puisque $S_{n,n}$ est une suite constante nulle, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n,n} = 0 \tag{65}$$

Remarque 2. Incroyable, non ?

Exercice

1. (a) Pour $\mathcal{D}$, on échelonne ce système (en une seule étape $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$)

$$(x,y,z)\in\mathcal{D} \iff \begin{cases} x+y+z=1\\ -3y-2z=-1 \end{cases} \tag{66}$$

On peut alors prendre z libre, posons $z = t \in \mathbb{R}$, et alors $y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t$ et $x = 1-y-z = 1-\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t\right)-t = \frac{2}{3}-\frac{1}{3}t$. Autrement dit $\mathcal{D}$ est la droite paramétrée

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = \frac{2}{3}-\frac{1}{3}t\\ y = \frac{1}{3}-\frac{2}{3}t\\ z = t \end{cases} \quad , \quad t\in\mathbb{R} \tag{67}$$

et on reconnait le vecteur directeur $(-1/3,-2/3,1)$ ($\mathcal{D}$ est l'ensemble des $A + t\vec{u}$, pour le point $A = (2/3,0,0)$). Prenons plutôt $\vec{u} = (-1,-2,3)$ (car $t(-1/3,-2/3,1) = \frac{t}{3}\vec{u}$, ces deux vecteurs paramètrent bien la même droite).

Pour $\mathcal{P}$, il suffit de passer deux variables à droite, écrivant $x = 6-3y-2z$. Prenant y et z libres ($y = s$, $z = t$, avec $(s,t)\in\mathbb{R}^2$)), alors $\mathcal{P}$ est le plan paramétré

$$\begin{cases} x = 6-3s-2t\\ y = s\\ z = t \end{cases} \tag{68}$$

et on reconnait les vecteurs directeurs $\vec{v} = (-3,1,0)$ et $\vec{w} = (-2,0,1)$ ($\mathcal{P}$ est l'ensemble des $B + s\vec{v} + t\vec{w}$, pour $B = (6,0,0)$).

(b) On calcule $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1)\times(-3)+(-2)\times 1+3\times 0 = 1$ et $\vec{u}\cdot\vec{w} = (-1)\times(-2)+(-2)\times 0+3\times(1) = 5$. Ces produits scalaires sont non-nuls, la droite $\mathcal{D}$ n'est donc pas orthogonal à $\mathcal{P}$.

(c) Un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est dans $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient à la fois les équations de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$, ce qui mène au système de 3 équations à 3 inconnues (le compte est bon, on peut espérer une unique solution)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 6 \end{array}\right. \tag{69}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & -3y & - & 2z & = & -1 \\ & & 2y & + & z & = & 5 \end{array}\right. \tag{70}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & -3y & - & 2z & = & -1 \\ & & & & -z & = & 13 \end{array}\right. \tag{71}$$

Le système est de Cramer, il admet une unique solution. On trouve $z = -13$ puis $3y = 1 - 2z = 27$ donc $y = 9$, et enfin $x = 1 - y - z = 5$. L'unique point d'intersection est $(5, 9, -13)$.

2. Soit $M = (x, y, z)$. Alors la condition $AM = BM$ est équivalente à $AM^2 = BM^2$ (inutile d'introduire des racines carrées puis de les éliminer immédiatement !), or $\overrightarrow{AM} = (x-1, y, z-2)$ et $\overrightarrow{BM} = (x, y-1, z)$, ainsi $\|\overrightarrow{AM}^2\| = (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 4z + 5$ et de même $\|\overrightarrow{BM}^2\| = x^2 + (y-1)^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 2y + z^2 + 1$. Alors la condition $\|\overrightarrow{AM}^2\| = \|\overrightarrow{BM}^2\|$ est équivalente à l'équation

$$x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 4z + 5 = x^2 + y^2 - 2y + z^2 + 1 \tag{72}$$
$$\Longleftrightarrow -2x - 4z + 5 = -2y + 1 \tag{73}$$
$$\Longleftrightarrow -2x + 2y - 4z + 4 = 0 \tag{74}$$
$$\Longleftrightarrow x - y + 2z = 2 \tag{75}$$

On reconnait bien une équation de plan.

Remarque 3. On vérifie aisément que ce plan passe par le milieu du segment $[A, B]$ (le point $(1/2, 1/2, 1)$) et qu'un vecteur normal est colinéaire à $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -2)$, tout comme pour la médiatrice d'un segment dans le plan !

3. On échelonne le système, en commençant par échanger L_1 et L_3 : soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ x & + & my & + & z & = & m \\ mx & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \tag{76}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ & & (m-1)y & + & (1-m)z & = & m - m^2 \\ & & (1-m)y & + & (1-m^2)z & = & 1 - m^2 \end{array}\right. \tag{77}$$

Cela nous amène à distinguer le cas $m = 1$: alors notre système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \tag{78}$$

Autrement dit il est compatible et avec deux variables libres, une seule équation. Cela correspond (on réfléchit un peu) au cas d'un plan, c'est le cas très spécial où les trois plans sont confondus (ils ont tous pour équation $x + y + z = 1$) et donc l'intersection est un plan elle-même.

Si $m \neq 1$, alors sachant $m - m^2 = m(1-m)$ et $1 - m^2 = (1-m)(1+m)$, les lignes L_2 et L_3 se divisent par $1 - m \neq 0$ et notre système devient

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ & & -y & + & z & = & m \\ & & y & + & (1+m)z & = & 1+m \end{array}\right. \tag{79}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ & & -y & + & z & = & m \\ & & & & (2+m)z & = & 1+2m \end{array}\right. \tag{80}$$

Alors dans le cas $2+m \neq 0$ ($m \neq -2$), c'est un système de rang 3 qui va admettre une unique solution. Cela correspond au cas où trois plans de l'espace s'intersectent en un seul point.
Si $m = -2$ alors le système devient

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 4 \\ & & -y & + & z & = & -2 \\ & & & & 0 & = & -3 \end{array}\right. \tag{81}$$

et il est incompatible, mais le système est de rang 2. L'intersection est donc vide, cela correspond au cas où deux des plans sont parallèles non confondus (le troisième intersecte alors les deux, mais il n'y a pas de point qui soit dans l'intersection des trois).