DS 7 Mathématiques

Problème 1

Le but de ce problème est de démontrer (enfin !) la formule suivante : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

Partie 1 : Une suite de polynômes

On définit une suite de polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence de la façon suivante : U_0 est le polynôme $x \mapsto 1$, U_1 est le polynôme $x \mapsto 2x$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_{n+2} est le polynôme $x \mapsto 2xU_{n+1}(x) - U_n(x)$.

1. Calculer les polynômes U_2, U_3 et U_4.
2. (a) Justifier avec une récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est un polynôme de degré n.
   (b) Donner une relation de récurrence vérifiée par le coefficient dominant a_n de U_n, puis donner l'expression de a_n en fonction de n
3. Démontrer par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall x \in \mathbb{R}$, $U_n(-x) = (-1)^n U_n(x)$. Ainsi, U_n est une fonction polynôme paire si n est pair, et une fonction polynôme impaire si n est impair.
4. (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta) \times U_n(\cos(\theta))) = \sin((n+1)\theta)$.
   (b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, les nombres $y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ (pour $1 \leqslant k \leqslant n$) sont n racines distinctes de U_n.
   (c) En déduire une factorisation de U_n.

Partie 2 : Modélisation en Python

Pour calculer les polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plus facilement, on peut utiliser un programme Python. Pour cela, on représente un polynôme P par la liste `P` de ses coefficients, telle que `P[k]` est le coefficient de x^k dans P. Par exemple, le polynôme $x \mapsto 1 - 5x + 3x^2$ est représenté par la liste `P = [1, -5, 3]`. Mais on autorise les listes à avoir des zéros « en trop » à la fin, par exemple P est aussi représenté par la liste `[1, -5, 3, 0, 0]`. Le polynôme nul est tout simplement la liste vide `[]`, mais aussi une liste de zéros comme `[0, 0, 0]`.

5. Dans le cas où la liste `P` correspondant à un polynôme P ne contient pas de zéros en trop, et où P n'est pas le polynôme nul, quelle est la relation entre la longueur de la liste `P` et le degré du polynôme P ?
6. On souhaite écrire une fonction `degré(P)`, prenant en argument une liste représentant un polynôme P et qui renvoie son degré, considérant dans ce contexte que le polynôme nul est de degré -1. Un élève écrit la fonction suivante pendant un TP mais, lorsqu'il la teste, il obtient parfois une erreur `IndexError: list index out of range`. Paniqué, il appelle son professeur à l'aide. Celui-ci demande dans le DS de corriger la fonction et d'expliquer l'erreur :

```python
def degré_bof_bof(P):
    n = len(P) - 1
    while P[n] == 0:
        n = n - 1
    return n
```

7. Que fait la fonction suivante ?

```python
def fonction_mysterieuse_mais_bien_utile(P):
    n = len(P)
    Q = [0] * n
    for i in range(n):
        Q[i] = - P[i]
    return Q
```

8. Écrire une fonction `somme(P, Q)`, prenant en argument deux listes représentant des polynômes P, Q et qui renvoie une liste représentant le polynôme somme $P + Q$. Les deux listes n'étant pas nécessairement de la même longueur, on fera l'hypothèse qu'on utilise la fonction uniquement quand la liste `P` est plus longue (ou de même longueur) que la liste `Q`.

9. Écrire une fonction `produit(P, Q)`, prenant en argument deux listes représentant des polynômes P et Q, et qui renvoie une liste représentant le produit de polynômes $P \times Q$.
10. En déduire une fonction `suite(n)` qui prend en argument un entier n supposé positif et qui renvoie la liste représentant le polynôme U_n.

Partie 3 : Une autre expression

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

11. Justifier que $\cos((2n+1)\theta) + i\sin((2n+1)\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{2n+1}$ puis en déduire
$$\cos((2n+1)\theta) + i\sin((2n+1)\theta) = \sum_{r=0}^{2n+1} i^r \binom{2n+1}{r} \sin^r(\theta)\cos^{2n+1-r}(\theta) \tag{1}$$
12. En identifiant la partie imaginaire dans cette somme, en déduire la formule
$$\sin((2n+1)\theta) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \sin^{2k+1}(\theta)\cos^{2n-2k}(\theta) \tag{2}$$
13. En déduire que, si $\sin(\theta) \neq 0$,
$$\boxed{\frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}(\theta)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \left(\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2\right)^{n-k}} \tag{3}$$
14. Montrer que $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} x^{2n-2k}(1-x^2)^k$ est le polynôme U_{2n}.

Partie 4 : Analyse

On définit donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $\boxed{P_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} x^{n-k}}$ et on définit la fonction cotangente $\boxed{\text{cotan} : \theta \mapsto \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{1}{\tan(\theta)}}$.

15. Quel est le degré de P_n ? Quel est son coefficient dominant ?
16. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_{\text{cotan}}$ de la fonction cotan ?
17. Montrer que
$$\forall \theta \in \mathcal{D}_{\text{cotan}}, \quad \boxed{\text{cotan}'(\theta) = -\frac{1}{\sin^2(\theta)} = -(1 + \text{cotan}^2(\theta))} \tag{4}$$
puis tracer le tableau de variations de la fonction cotan sur $]0, \pi[$.
18. On note pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $x_k = \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.
    (a) Justifier que ce sont n racines distinctes de P_n.
    (b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$, et donner ce λ.
    (c) En exprimant le coefficient de x^{n-1} dans P_n de deux façons différentes, justifier que
$$\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3} \tag{5}$$
    (d) En déduire aussi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$.
19. Démontrer les inégalités, pour tout $y \in [0, \pi/2[$, $\sin(y) \leqslant y$ et $y \leqslant \tan(y)$ et en déduire si $y \neq 0$
$$\text{cotan}^2(y) \leqslant \frac{1}{y^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2(y)} \tag{6}$$
20. En déduire l'inégalité $\dfrac{n(2n-1)}{3} \leqslant \dfrac{(2n+1)^2}{\pi^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2n(n+1)}{3}$.
21. Conclure en divisant membre à membre par n^2.

Exercice

On considère les sous-ensembles suivants de vecteurs (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$:

$$F : \begin{cases} x = a + b \\ y = 2a + 2b \\ z = -2a + c \\ t = a + 3b + c \end{cases} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad G : \begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 2y + z - t = 0 \\ 3x + y - z + t = 0 \end{cases} \tag{7}$$

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ de F.
3. Déterminer une base $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ de G.
4. Déterminer le rang de la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$. Est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
5. On pose $H = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$. Donner une équation pour H, et une base de H extraite de la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$.
6. On pose les vecteurs $\overrightarrow{f_1} = (2, 1, -1, 0)$, $\overrightarrow{f_2} = (3, 0, 0, -1)$, $\overrightarrow{f_3} = (2, 1, 0, 1)$. Montrer que $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ est une base de H.
7. Soit $\overrightarrow{e_4} = (0, 0, 0, 1)$. Montrer que $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{e_4})$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
8. Montrer que pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4$, il existe un unique $(\overrightarrow{f}, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f} + \lambda \overrightarrow{e_4}$.

Problème 2

On étudie la gestion d'un réseau électrique, qui subit des incidents. Malheureusement, en l'absence de technicien sur place, le système ne peut que se dégrader. À tout moment le système est dans l'un des trois états suivants :

- E_1 : incident léger,
- E_2 : incident grave,
- E_3 : incident critique, le système est à l'arrêt.

Au départ, le système est dans l'état E_1. À chaque heure, le système peut éventuellement évoluer d'état, toujours dans le sens d'une dégradation. On suppose donc qu'il existe un nombre réel $p \in]0, 1[$ tel que si le système était dans l'état E_1 ou bien E_2 il y reste avec probabilité p ; et que, en posant $q = 1 - p$, alors si le système était en E_1 il passe en E_2 avec probabilité q et de même s'il était en E_2 il passe en E_3 avec probabilité q ; une fois en E_3, il y reste.

Partie 1 : Première approche

1. On pourra s'aider d'un arbre de probabilité pour répondre aux questions suivantes :
   (a) Au bout d'une heure, quelles sont les probabilités que le système soit dans l'état E_1 ? E_2 ? E_3 ?
   (b) Quelle est la probabilité que le système soit toujours à l'état E_1 au bout de 3 heures ?
   (c) Quelle est la probabilité que le système soit à l'état E_3 au bout de 3 heures ?
   (d) Quelle est la probabilité que le système soit à l'état E_3 en exactement 3 heures, et pas avant ?

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note A_k l'évènement « le système est dans l'état E_1 après k heures » (pour $k = 0$ l'expression « après k heures » signifie bien à l'état initial) et a_k sa probabilité ; de même on note B_k (resp. C_k) : « au bout de k heures, le système est dans l'état E_2 (resp. E_3) » et b_k (resp. c_k) sa probabilité.

2. Que peut-on dire de l'ensemble des évènements (A_k, B_k, C_k) (pour k fixé) ?
3. Justifier que pour tout $k \geqslant 0$, $a_{k+1} = pa_k$ et $b_{k+1} = qa_k + pb_k$. Donner une relation de récurrence similaire pour c_k.
4. Représenter sur sa copie un graphe orienté pondéré, dont les sommets sont les états E_1, E_2, E_3, et dont les poids sur les arêtes sont donnés par les probabilités de passer d'un état vers un autre.

Partie 2 : Modélisation en Python

On souhaite simuler l'évolution aléatoire de ce système. On suppose qu'on a importé le module `random` avec la commande `import random as rd`. On rappelle qu'il contient la fonction `randint(a ,b)` (nombre aléatoire entre a et b inclus) et `random()` (nombre aléatoire dans $[0, 1]$). On représente les états simplement par un nombre entier 1, 2 ou 3.

5. Écrire une fonction `heure_suivante(x, p)` qui prend en argument la probabilité p et l'état actuel dans lequel se trouve le système, donné par une variable `x` de type entier, et qui renvoie une simulation de l'état du système l'heure suivante, aléatoirement selon ces règles.
6. En déduire une fonction `état_futur(p, k)` qui prend en argument, toujours, la probabilité p ; et un entier $k \in \mathbb{N}$, et qui renvoie une simulation de l'état du système au bout de k heures.
7. Écrire une fonction `temps_survie(p)` qui prend en argument toujours la probabilité p, qui simule l'état du système, s'arrête dès que l'état E_3 est atteint en renvoyant le nombre d'heures au bout duquel cela s'est produit.
8. Écrire une fonction `temps_survie_moyen(p, N)` qui répète la simulation précédente N fois ($N \in \mathbb{N}^*$) et renvoie le nombre moyen d'heures au bout duquel le système est passé en E_3.

Partie 3 : Étude matricielle

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose le vecteur colonne $X_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$ et la matrice $M = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & q & 1 \end{pmatrix}$.

9. Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = MX_k$.
10. En déduire $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_k = M^k X_0$.
11. Quelle est l'interprétation du coefficient (i, j) de la matrice M ? Et de M^k ?
12. Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ kqp^{k-1} & p^k & 0 \\ u_k & 1-p^k & 1 \end{pmatrix}$, où le coefficient u_k est à déterminer.
13. En déduire une expression de chacune des suites a_k, b_k et c_k, puis leur limite pour $k \to +\infty$. Quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?