DS 8 Mathématiques partie 1
Correction

Problème 1

1. X_1 correspond au tirage d'une jeton dans l'urne numérotée N donc c'est tout simplement une $\boxed{\text{loi uniforme sur } [\![1, N]\!]}$. On rappelle qu'alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$, $\boxed{\mathbb{P}(X_1 = i) = \frac{1}{N}}$.

2. $\mathbb{P}_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$ correspond à la probabilité de tirer le numéro i au $(k+1)$-ième tirage, sachant qu'on a tiré le numéro j au k-ième tirage. Mais précisément cela signifie que le $(k+1)$-ième tirage est réalisé dans l'urne numéro j et donc la « loi conditionnelle de X_{k+1} sachant $(X_k = j)$ » (c'est le vocabulaire, dont nous n'avons pas besoin) est une loi uniforme sur $[\![1, j]\!]$. En résumé (ne pas oublier de distinguer les cas)

$$\boxed{\mathbb{P}_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i) = \begin{cases} \frac{1}{j} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}} \tag{1}$$

3. On souhaite simuler cette expérience en Python. On rappelle que le module `random`, à importer, contient les fonctions `randint(a, b)` (nombre aléatoire entier uniformément au hasard entre `a` et `b`, bornes incluses) et `random()` (nombre aléatoire réel uniformément au hasard dans $[0, 1]$).

   (a) Pour simuler X_k, il va falloir répéter k fois des tirages. À chaque fois on effectue un tirage uniforme (avec `randint` donc, en important le module, avec l'une des syntaxes possibles au choix). Il est donc nécessaire de garder dans une boucle `for` une variable qui contient le numéro actuel de l'urne dans laquelle on tire.

```python
import random as rd
def simule(k, N):
    # urne dans laquelle on tire
    x = N
    for i in range(k):
        y = rd.randint(1, x)
        x = y
return x
```

   (b) Pas très difficile, on répète la fonction précédente, on regarde le résultat, et on compte ; puis à la fin on transforme cela en fréquences. Le $(X_k = i+1)$ provient tout simplement du fait que les urnes sont numérotées à partir de 1 mais la liste à partir de 0.

```python
def simule_loi(k, N, nrepete):
    L = [0] * N
    # compte
    for i in range(nrepete):
        x = simule(k, N)
        L[x-1] = L[x-1] + 1
    # à la fin, forme les fréquences
    for x in range(N):
        L[x] = L[x] / nrepete
    return L
```

4. On applique la $\boxed{\text{formule des probabilités totales}}$, pour l'évènement $(X_{k+1} = i)$, par rapport au système complet d'évènements formé par les valeurs de X_k (c'est-à-dire les $(X_k = j)$, a priori pour $1 \leqslant j \leqslant N$). On obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=i}^{N} \mathbb{P}_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i) \times \mathbb{P}(X_k = j)} \tag{2}$$

Dans cette somme, par la question précédente, les termes $\mathbb{P}_{(X_k=j)}(X_{k+1}=i)$ sont nuls si $i>j$ (on peut donc démarrer la somme à partir de $j=i$) et égaux à $\frac{1}{j}$ sinon. On obtient donc directement

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{k+1}=i)=\sum_{j=i}^{N}\frac{1}{j}\mathbb{P}(X_k=j)} \tag{3}$$

5. Attention, k est fixé, il faut donc comparer les $\mathbb{P}(X_k=i+1)$ et $\mathbb{P}(X_k=i)$ pour $1\leqslant i\leqslant N-1$. Mais pour cela on peut appliquer la formule précédente. Elle ne permettra pas de traiter le cas $k=1$:
   - Si $k=1$ alors $\boxed{\mathbb{P}(X_k=i)=\frac{1}{N}}$ pour tout $1\leqslant i\leqslant N$ donc c'est une $\boxed{\text{suite constante}}$.
   - Si $k\geqslant 2$ alors la formule précédente (en remplaçant k par $k-1$) donne

$$\mathbb{P}(X_k=i+1)=\sum_{j=i+1}^{N}\frac{1}{j}\mathbb{P}(X_{k-1}=j) \tag{4}$$

$$\mathbb{P}(X_k=i)=\sum_{j=i}^{N}\frac{1}{j}\mathbb{P}(X_{k-1}=j) \tag{5}$$

   et donc directement

$$\boxed{\mathbb{P}(X_k=i+1)-\mathbb{P}(X_k=i)=-\frac{1}{i}\mathbb{P}(X_{k-1}=i)\leqslant 0} \tag{6}$$

   ce qui montre que $\boxed{\text{la suite est décroissante}}$.

6. (a) Aucun besoin de calculs ici, en effet si on tire un moment dans l'urne 1 alors on tire nécessairement le jeton 1 et donc on reste dans l'urne 1, autrement dit on a l'inclusion d'évènements $\boxed{(X_k=1)\subset(X_{k+1}=1)}$ donnant lieu à l'inégalité $\boxed{\mathbb{P}(X_k=1)\leqslant\mathbb{P}(X_{k+1}=1)}$. Donc cette suite de probabilités est croissante.

   (b) On a alors affaire à une suite croissante et majorée (par 1 : ce sont des probabilités !) donc par le $\boxed{\text{théorème de convergence monotone}}$, la suite des $\Big(\mathbb{P}(X_k=1)\Big)_{k\geqslant 1}$ converge, vers un certain ℓ et on sait que $\ell\leqslant 1$.

   (c) Il s'agit d'une simple manipulation de somme, à partir de la question 4. On a en effet

$$\mathbb{P}(X_{k+1}=1)=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}\mathbb{P}(X_k=j) \tag{7}$$

$$=\mathbb{P}(X_k=1)+\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j}\mathbb{P}(X_k=j) \tag{8}$$

$$\geqslant\mathbb{P}(X_k=1)+\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{N}\mathbb{P}(X_k=j) \tag{9}$$

   car $\boxed{\frac{1}{j}\geqslant\frac{1}{N}}$ sous la somme. Mais sortant ce $\frac{1}{N}$ de la somme, et se souvenant que $\boxed{\sum_{j=1}^{N}\mathbb{P}(X_k=j)=1}$ (c'est le système complet d'évènements associé aux valeurs de X_k) alors

$$\mathbb{P}(X_k=1)+\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{N}\mathbb{P}(X_k=j)=\mathbb{P}(X_k=1)+\frac{1}{N}\sum_{j=2}^{N}\mathbb{P}(X_k=j) \tag{10}$$

$$=\mathbb{P}(X_k=1)+\frac{1}{N}(1-\mathbb{P}(X_k=1)) \tag{11}$$

   ce qui donne l'inégalité voulue

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{k+1}=1)\geqslant\mathbb{P}(X_k=1)+\frac{1}{N}\Big(1-\mathbb{P}(X_k=1)\Big)} \tag{12}$$

(d) Passant à la limite pour $k \to +\infty$ (attention aux variables manipulées, tout dans l'énoncé indique clairement que c'est k qui varie et pas N), on obtient

$$\ell \geqslant \ell + \frac{1}{N}(1-\ell) \tag{13}$$

Mais ceci implique directement $0 \geqslant 1-\ell$ soit $\boxed{\ell \geqslant 1}$ Comme c'est une probabilité et qu'on sait aussi $\ell \leqslant 1$ alors on déduit $\boxed{\ell = 1}$.

7. (a) Cela provient du fait que (on rappelle encore que N est fixé) $\sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X_k = j) = 1$. C'est une somme finie de suites dépendant de k. Si le premier terme tend vers 1 alors le reste $\sum_{j=2}^{N} \mathbb{P}(X_k = j)$ doit tendre vers 0. Mais comme tous les termes sont positifs alors ils tendent chacun vers 0, une façon de l'écrire est de majorer chaque terme par la somme totale : pour tout $2 \leqslant i \leqslant N$,

$$0 \leqslant \mathbb{P}(X_k = i) \leqslant \sum_{j=2}^{N} \mathbb{P}(X_k = j) = 1 - \mathbb{P}(X_k = 1) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{14}$$

et donc ici c'est par le $\boxed{\text{théorème des gendarmes}}$ qu'on déduit $\boxed{\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(X_k = i) = 0}$.

(b) L'interprétation se comprend bien : on diminue nécessairement de numéro d'urne, et au bout d'un moment on atteint l'urne 1. Après un nombre de tirages assez grand il devient extrêmement probable (on dit « presque sûrement ») de tirer dans l'urne 1, et donc extrêmement improbable de tirer dans l'une des autres urnes.

Problème 2

1. D'abord on dérive (par rapport à x bien sûr ; t est un paramètre fixé) : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_t'(x) = 4 \times 5x^4 + 5t \times 4x^3 = 20x^4 + 20tx^3$ ce qui se factorise en $\boxed{P_t'(x) = 20x^3(x+t)}$. On en déduit aisément le signe, en fonction de t, et le tableau de variations pour $t > 0$: $P_t'(x)$ s'annule en $x = 0$ et $x = -t < 0$.

x	$-\infty$		$-t$		0		$+\infty$
$P_t'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P_t(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	t^5-4	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

(15)

Sur ce tableau, il faut bien indiquer :

— $\boxed{P_t(0) = -4}$, indépendamment de t,

— $P_t(-t) = 4(-t)^5 + 5t \times (-t)^4 - 4 = -4t^5 + 5t^5 - 4 = \boxed{t^5 - 4 = P_t(-t)}$,

— Les limites, qui se calculent aisément pour un polynôme : $P_t(x) = 4x^5\left(1 + \frac{5t}{4x} - \frac{1}{x^5}\right)$ d'où on déduit (la fonction $x \mapsto x^5$ est impaire) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} P_t(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to-\infty} P_t(x) = -\infty}$.

2. On a alors plusieurs cas à distinguer, selon le signe de $t^5 - 4$. Or la fonction $t \mapsto t^5$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (exactement comme la fonction cube), donc $t^5 - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[5]{4}$, négatif avant et positif après.

— Si $t < \sqrt[5]{4}$, alors $P_t(-t) < 0$. Dans ce cas, sur tout $[-\infty, 0]$ on sait que $P_t(x) < 0$, et on voit que sur $[0, +\infty]$, P_t réalise une bijection vers $[-4, +\infty]$. Donc dans ce cas l'équation $P_t(x) = 0$ admet $\boxed{\text{une unique solution}}$, qui est dans $[0, +\infty]$.

— Si $t = \sqrt[5]{4}$, alors $P_t(-t) = 0$. Il y a donc une solution en $-t < 0$, et pas d'autre dans $[-\infty, 0]$ car les valeurs prises par P_t sont strictement négatives. Par le même argument que précédemment il y a une solution dans $[0, +\infty]$. En conclusion dans ce cas l'équation $P_t(x) = 0$ admet $\boxed{\text{deux solutions}}$.

— Si $t > \sqrt[5]{4}$, alors $P_t(-t) > 0$. Dans ce cas P_t réalise trois bijections différentes : une de $[-\infty, -t]$ vers $[-\infty, t^5 - 4]$, une de $[-t, 0]$ vers $[-4, t^5 - 4]$, et enfin une de $[0, +\infty]$ vers $[-4, +\infty]$. Dans chacun de ces intervalles l'équation $P_t(x) = 0$ admet une unique solution. Il y a donc dans ce cas $\boxed{\text{trois solutions}}$.

3. Si x est une racine multiple de P_t, alors on doit avoir $P_t(x) = 0$ et $P_t'(x) = 0$. Mais les racines de P_t' sont assez limitées : soit 0, soit $-t$. Or on sait déjà que $P_t(0) = -4$ donc 0 n'est pas une racine de P_t. Ainsi seul $-t$ peut être éventuellement une racine multiple. C'est le cas si et seulement si $P_t(-t) = 0$, c'est-à-dire par la discussion précédente $t = \sqrt[5]{4}$. Conclusion :
$\boxed{\text{Si } t = \sqrt[5]{4} \text{ alors seul } x = -t \text{ est une racine multiple ; sinon toutes les racines sont simples.}}$

Remarque : maintenant, « $r(t)$ l'unique racine réelle strictement positive de P_t » est bien définie, se lit dans la partie droite du tableau de variations.

4. On vérifie que $P_t(0) = -4 < 0$, et $P_t(1) = 4 + 5t - 4 = \boxed{5t = P_t(1) > 0}$. Cela démontre, toujours via le théorème de la bijection, que la solution strictement positive à $P_t(x) = 0$ est nécessairement entre 0 et 1, strictement : par exemple par l'absurde, dès que $x \geqslant 1$ alors $P_t(x) \geqslant 5t > 0$. En conclusion $\boxed{r(t) \in]0, 1[}$.
5. Dichotomie ! Aucune surprise, la fonction est strictement croissante sur $[0, 1]$, la variable t est un paramètre global. Inutile d'écrire des valeurs absolues si dans la boucle on a toujours `a` $\leqslant$ `b`.

```python
def approxime(t, epsilon):
    a = 0
    b = 1
    while b - a >= epsilon:
        m = (a + b) / 2
        if 4*m**5 + 5*t*m**4 - 4 >=0:
            # chercher entre a et m
            b = m
        else:
            # chercher entre m et b
            a = m
    return (a, b)
```

6. (a) Écrivons proprement ce que l'on sait. Par définition on sait $P_{t_1}(r(t_1)) = 0$ et $P_{t_2}(r(t_2)) = 0$, avec $r(t_1)$, $r(t_2) \in]0, 1[$, et $0 < t_1 < t_2$. Cela se traduit par

$$0 = 4(r(t_1))^5 + 5t_1(r(t_1))^4 - 4 \tag{16}$$
$$0 = 4(r(t_2))^5 + 5t_2(r(t_2))^4 - 4 \tag{17}$$
$$P_{t_1}(r(t_2)) = 4(r(t_2))^5 + 5t_1(r(t_2))^4 - 4 \tag{18}$$

On a alors très envie d'écrire (18) − (17) :

$$P_{t_1}(r(t_2)) - 0 = \left(4(r(t_2))^5 + 5t_2(r(t_2))^4 - 4\right) - \left(4(r(t_2))^5 + 5t_1(r(t_2))^4 - 4\right) \tag{19}$$
$$= 5t_2(r(t_2))^4 - 5t_1(r(t_2))^4 \tag{20}$$
$$= \boxed{5(r(t_2))^4(t_1 - t_2) = P_{t_1}(r(t_2))} \tag{21}$$

En conclusion puisqu'on a pris $0 < t_1 < t_2$ alors $\boxed{P_{t_1}(r(t_2)) < 0}$.

(b) Ce calcul permet de placer la valeur t_2 sur le tableau de variations de P_{t_1} :

x	$-\infty$		$-t_1$		0		$r(t_2)$		$r(t_1)$		$+\infty$
$P_{t_1}(x)$	$-\infty$	↗	$t_1^5 - 4$	↘	-4	↗	$P_{t_1}(t_2) < 0$	↗	0	↗	$+\infty$

(22)

Cela démontre que $\boxed{t \mapsto r(t) \text{ est strictement décroissante}}$. Plus précisément l'argument est le suivant : toujours avec $0 < t_1 < t_2$, supposons par l'absurde $r(t_2) \geqslant r(t_1)$, alors par la croissance de $x \mapsto P_{t_1}(x)$ on aurait $P_{t_1}(r(t_2)) \geqslant 0$, or nous avons montré le contraire, c'est donc que $r(t_2) < r(t_1)$.

7. (a) La fonction $t \mapsto r(t)$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et majorée par 1 (car $r(t) \in]0,1[$). Ce sont les bonnes hypothèses pour appliquer le $\boxed{\text{théorème de la limite monotone}}$ (dans le cas décroissant, et sur la borne de gauche : faire un dessin rapide pour ne pas se tromper de sens) et donc on conclut que $\boxed{r(t) \text{ admet une limite pour } t \to 0}$. Cela permet de prolonger r par continuité en 0 (à droite), en définissant $r(0)$ comme cette limite.

   (b) On ré-écrit encore une fois que par définition de r,

$$0 = P_t(r(t)) = 4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 \tag{23}$$

   On étudie alors le passage à la limite pour $t \to 0$: le terme $4(r(t))^5 \to 4(r(0))^5$, le terme $5t(r(t))^4 \to 0$ ($r(t)$ a une limite finie), et donc à la limite $\boxed{r(0) \text{ vérifie nécessairement } 0 = 4(r(0))^5 - 4}$. Mais cette équation est équivalente à $(r(0))^5 = 1$ qui admet l'unique solution $\boxed{r(0) = 1}$.

8. (a) La méthode est exactement la même en $+\infty$: $t \mapsto r(t)$ est décroissante et minorée par 0 donc $\boxed{\text{par le théorème de la limite monotone}}$ (cas décroissant, minoré, sur la borne de droite), admet une limite ℓ en $+\infty$, et on sait que ℓ est fini et que $\ell \geqslant 0$.

   (b) Idem, on commence par écrire $0 = P_t(r(t)) = 4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4$, valable pour tout $t > 0$, et on étudie le passage à la limite pour $t \to +\infty$. Ici on ne peut pas remplacer simplement $r(t)$ par ℓ car il faudrait aussi remplacer t par $+\infty$... Mais on sent bien que cela pose problème que le terme $5t(r(t))^4$ ait pour limite $+\infty$ si les autres termes ont une limite finie.
   Pour le faire proprement il s'agit d'un raisonnement par l'absurde. On sait que ℓ est fini et $\ell \geqslant 0$, supposons alors $\ell > 0$. Alors le terme $4(r(t))^5 \to 4\ell^5$, et de même $5(r(t))^4 \to 5\ell^4 > 0$, donc son produit avec t doit tendre vers $+\infty$ (cas d'une limite $+\infty \times$ une limite strictement positive). On peut ré-écrire cela en

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad 5t(r(t))^4 = 4 - 4(r(t))^5 \tag{24}$$

   Le terme de gauche tend vers $+\infty$ et celui de droite vers une limite finie : absurde !
   En conclusion $\boxed{\ell > 0 \text{ est absurde}}$ et c'est donc que $\boxed{\ell = 0}$.

9. (a) On peut par exemple tracer le tableau de variations de f. Pour $x \in]0,1]$, f est bien dérivable et on calcule aisément

$$f'(x) = \frac{4}{5} \times \frac{-5x^4 \times x^4 - (1-x^5) \times 4x^3}{x^8} \tag{25}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{-x^8 - 4x^3}{x^8} \tag{26}$$

$$= \boxed{-\frac{4}{5} \times \frac{x^5+4}{x^5} = f'(x) < 0} \tag{27}$$

   On aura aussi besoin des limites : clairement $\boxed{f(1) = 0}$ et $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$ (il n'y a pas de forme indéterminée ici), en résumé :

x	0		1
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

(28)

   Ainsi f est strictement décroissante et continue, on en déduit par le théorème de la bijection que $\boxed{f \text{ réalise une bijection de }]0,1] \text{ vers } [0,+\infty[}$.

   (b) Une possibilité est d'écrire la définition de $r(t)$: l'unique réel > 0 tel que $4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = 0$. Voyons ceci comme une équation **d'inconnue** t : si on trouve une expression pour t en fonction de $r(t)$ alors ce sera la bijection réciproque de r.

Mais cette équation est équivalente à $5t(r(t))^4 = 4 - 4(r(t))^5$ soit (pour $r(t) \neq 0$) $t = \frac{4(1-(r(t))^5)}{5(r(t))^4}$. Rappelons que $r(t) \in]0,1[$, mais ces calculs sont valables aussi pour $t = 0$ correspondant à $r(0) = 1$. Ceci démontre bien que (attention à l'ordre logique des arguments) $\boxed{r \text{ est bijective}}$ et que $\boxed{f \text{ est la réciproque de } r}$.

Enfin comme f est continue sur $]0,1]$, c'est le $\boxed{\text{théorème de la bijection continue}}$ qui montre que $\boxed{r \text{ est continue sur } [0,+\infty[}$.

10. (a) Il suffit de reprendre tel quel le tableau de variations, mais en plaçant la valeur $-t$ du côté strictement positif :

x	$-\infty$		0		$-t$		$+\infty$
$P_t'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P_t(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	t^5-4	$\nearrow$	$+\infty$

(29)

C'est bien cohérent : $t^5 < 0$ dans ce cas, donc $t^5 - 4 < -4$.
On lit alors que l'équation $P_t(x) = 0$ admet $\boxed{\text{une unique solution}}$, qui est dans l'intervalle $[-t,+\infty[$.

(b) *Remarque : on ne peut pas directement appliquer la méthode de dichotomie sur $[-t,+\infty[$, car si on sait bien que $P_t(-t) \leqslant 0$, on peut prendre notre borne $a = -t$, mais on ne connait pas encore de borne b où $P_t(b) \geqslant 0$. On se propose donc de chercher une telle borne (qui existe nécessairement, mais peut être assez loin et dépendre de t).*
Il suffit donc d'écrire une boucle `while`.

```
def borne(t):
    k = 0
    while 4**k**5 + 5*k*t**4 - 4 < 0:
        k = k + 1
    return k
```

(c) On applique alors la méthode de dichotomie comme précédemment, mais entre $-t$ (ou bien 0, peu importe) et l'entier k déterminé par la fonction précédente.

```
def approxime2(t, epsilon):
    a = -t
    b = borne(t)
    while b - a >= epsilon:
        m = (a + b) / 2
        if 4*m**5 + 5*t*m**4 - 4 >=0:
            # chercher entre a et m
            b = m
        else:
            # chercher entre m et b
            a = m
    return (a, b)
```

(d) Les calculs faits avec f restent les mêmes et montrent que f et r sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Ici $r(t) \in]0,+\infty]$, et f est strictement décroissante sur $]0,+\infty]$ (et toujours continue). Donc encore une fois r est continue, en tant que réciproque de f.

(e) Encore la même méthode. Par le théorème de la limite monotone, $\lim_{t\to-\infty} r(t)$ existe et est fini ou bien $+\infty$. Comme $r(0) = 1$ la limite est même $\geqslant 1$. On écrit $P_t(r(t)) = 4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = 0$ et on étudie le passage à la limite pour $t \to -\infty$. Mais si r tend vers une limite finie (strictement positive, donc) alors le terme $t(r(t))^4$ tend vers $-\infty$, ce qui pose problème car les autres termes ont une limite finie. En conclusion $\boxed{\lim_{t\to-\infty} r(t) = +\infty}$.

Exercice

Remarque : les quatre limites sont a priori des formes indéterminées. Mais les formes indéterminées, cela n'existe pas vraiment : soit il y a une limite, soit il n'y en a pas. . .

A. On pose (réflexe !) $x = 2 + h$, ainsi $x \to 2$ est équivalent à $h \to 0$, et alors

$$\frac{\sqrt{2+x}-2}{\ln(\frac{x}{2})} = \frac{\sqrt{4+h}-2}{\ln(1+\frac{h}{2})} \tag{30}$$
$$= \frac{2(\sqrt{1+\frac{h}{4}}-1)}{\ln(1+\frac{h}{2})} \tag{31}$$

Cela fait alors apparaitre deux équivalents usuels. D'une part $\sqrt{1+u}-1 \sim_{u\to 0} \frac{u}{2}$, appliqué avec $u = \frac{h}{4}$ (qui tend bien vers 0 avec h). D'autre part $\ln(1+u) \sim_{u\to 0} u$ appliqué avec $u = \frac{h}{2}$. Ainsi on obtient

$$\frac{2(\sqrt{1+\frac{h}{4}}-1)}{\ln(1+\frac{h}{2})} \underset{h\to 0}{\sim} 2 \times \frac{\frac{1}{2}\times\frac{h}{4}}{\frac{h}{2}} \sim \frac{h}{2h} \tag{32}$$

et donc $\boxed{A = \frac{1}{2}}$.

B. Au numérateur, si $x \to 0$ alors $\cos(2x) \to 1$ et on se retrouve avec $\ln(1) = 0$. Pour utiliser les équivalents usuels proprement il est nécessaire d'écrire $\ln(\cos(2x)) = \ln(1 + (\cos(2x) - 1))$, ce qui ramène d'une part à $\cos(u) - 1 \sim -\frac{u^2}{2}$ pour $u \to 0$, appliqué ici avec $u = 2x$, et d'autre par $\ln(1+v) \sim v$ pour $v \to 0$, qu'on peut appliquer ici avec $v = \cos(2x) - 1$ *car* ceci tend bien vers 0 avec x. En résumé

$$\ln(\cos(2x)) = \ln(1 + (\cos(2x) - 1)) \underset{x\to 0}{\sim} \cos(2x) - 1 \sim -\frac{(2x)^2}{2} \tag{33}$$

Quant au dénominateur, c'est encore le même équivalent de cos, qui donne $1 - \cos(3x) \sim \frac{(3x)^2}{2}$. Ainsi

$$\frac{\ln(\cos(2x))}{1-\cos(3x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{(2x)^2}{2}}{\frac{(3x)^2}{2}} \sim -\frac{\frac{4x^2}{2}}{\frac{9x^2}{2}} \sim -\frac{4x^2}{9x^2} \tag{34}$$

et donc $\boxed{B = -\frac{4}{9}}$.

C. Avant de dire des bêtises, réflexe : on écrit $x^x = \exp(x\ln(x))$. Ici $x \to 0$ donc (comparaisons usuelles) $x\ln(x) \to 0$, et ainsi $x^x \to 1$. On est donc bien en présence d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Mais, par ces mêmes calculs, on reconnait au numérateur l'équivalent usuel $\exp(u) - 1 \sim_{u\to 0} u$ qu'on peut appliquer avec $u = x\ln(x)$ **car ceci tend bien vers** 0. On a donc $x^x - 1 \sim_{x\to 0} x\ln(x)$.
Quant au dénominateur, ici c'est bien l'équivalent usuel $\sin(u) \sim_{u\to 0} u$ appliqué avec $u = x^2$, qui tend bien vers 0. En résumé

$$\frac{x^x-1}{\sin(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\ln(x)}{x^2} \sim \frac{\ln(x)}{x} \tag{35}$$

Mais ceci n'est pas une forme indéterminée : x est nécessairement strictement positif, $\ln(x) \to -\infty$ et $\frac{1}{x} \to +\infty$ donc la limite est $\boxed{C = -\infty}$.

D. Il faut analyser calmement chacun des termes. C'est un produit.
D'une part

$$\sqrt{n+3} - \sqrt{n} = \sqrt{n(1+\tfrac{3}{n})} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1\right) \tag{36}$$

Ceci fait apparaitre l'équivalent usuel $\sqrt{1+u} - 1 \sim_{u\to 0} \frac{u}{2}$ qu'on applique ici avec $u = \frac{3}{n}$ qui tend bien vers 0 pour $n \to +\infty$. Ainsi

$$\sqrt{n+3} - \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \times \frac{3}{2n} \sim \frac{3}{2\sqrt{n}} \tag{37}$$

D'autre part, dans $\ln(e^{\sqrt{n}}+2)$ on a sous le ln une somme dont c'est clairement le terme $e^{\sqrt{n}}$ qui domine, on conjecture aisément que le terme est équivalent à $\ln(e^{\sqrt{n}}) = \sqrt{n}$. Pour le démontrer il faut comme d'habitude factoriser dans la somme :

$$\begin{aligned} \ln(e^{\sqrt{n}}+2) &= \ln\left(e^{\sqrt{n}}\left(1+\tfrac{2}{e^{\sqrt{n}}}\right)\right) && (38)\\ &= \ln(e^{\sqrt{n}}) + \ln(1+\tfrac{2}{e^{\sqrt{n}}}) && (39)\\ &= \sqrt{n} + \ln(1+\frac{2}{e^{\sqrt{n}}}) && (40) \end{aligned}$$

mais alors $\frac{\ln(e^{\sqrt{n}}+2)}{\sqrt{n}} \to 1$ et donc tout ce terme est équivalent à $\sqrt{n}$. En résumé

$$(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})\ln(e^{\sqrt{n}}+2) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2\sqrt{n}} \times \sqrt{n} \tag{41}$$

et donc la limite est $\boxed{D = \frac{3}{2}}$.