DS 8 Mathématiques partie 1

Problème 1

Soit un entier $N \geqslant 2$. On considère N urnes, numérotées de 1 à N. Pour $1 \leqslant i \leqslant N$, l'urne i contient exactement i jetons, numérotés de 1 à i. On considère l'expérience suivante :

— Au départ on tire un jeton dans l'urne numérotée N, uniformément au hasard,

— Si le jeton tiré indique le numéro i, alors le tirage suivant se fera dans l'urne numérotée i,

— Et on recommence, en tirant un jeton dans l'urne i.

On réalise ainsi une suite infinie de tirages. Pour $k \geqslant 1$, on note X_k la variable aléatoire qui indique le numéro du jeton obtenu au k-ième tirage ; pour $k = 1$ il s'agit donc du jeton tiré dans l'urne numéro N, et le résultat du k-ième tirage indique dans quelle urne effectuer le $(k+1)$-ième tirage.

1. Quelle est la loi de X_1 ?
2. Pour tout $k \geqslant 1$, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, qu'est-ce que $\mathbb{P}_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$?
3. On souhaite simuler cette expérience en Python. On rappelle que le module `random`, à importer, contient les fonctions `randint(a, b)` (nombre aléatoire entier uniformément au hasard entre `a` et `b`, bornes incluses) et `random()` (nombre aléatoire réel uniformément au hasard dans $[0, 1]$).
   (a) Écrire une fonction `simule(k, N)` qui prend en argument l'entier $N \geqslant 2$ (le nombre d'urnes) et un entier $k \geqslant 1$, et renvoie une simulation de la variable aléatoire X_k.
   (b) En déduire une fonction `simule_loi(k, N, nrepete)` qui prend en argument en plus un nombre entier `nrepete` $\geqslant 1$, qui répète l'expérience `nrepete` fois et renvoie une liste `L` de longueur N où `L[i]` est la fréquence des évènements $(X_k = i + 1)$ dans la simulation.
4. Établir que pour $k \geqslant 1$ et $1 \leqslant i \leqslant N$,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j} \mathbb{P}(X_k = j) \tag{1}$$

5. Pour $k \geqslant 1$ fixé, montrer que la suite des $\Big(\mathbb{P}(X_k = i)\Big)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ est décroissante.
6. (a) Montrer que la suite des $\Big(\mathbb{P}(X_k = 1)\Big)_{k \geqslant 1}$ est croissante.
   (b) Justifier que cette suite converge pour $k \to +\infty$; on notera ℓ la limite.
   (c) Montrer que

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) \geqslant \mathbb{P}(X_k = 1) + \frac{1}{N}\Big(1 - \mathbb{P}(X_k = 1)\Big) \tag{2}$$

   (d) En déduire que $\ell = 1$.
7. (a) Déduire des questions précédentes que pour tout $i \in [\![2, N]\!]$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbb{P}(X_k = i) = 0$.
   (b) Quelle interprétation pouvez-vous donner de ce résultat ?

Problème 2

Soit un paramètre $t \in]0, +\infty[$. On considère le polynôme $P_t : x \mapsto 4x^5 + 5tx^4 - 4$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $x \mapsto P_t(x)$.
2. En déduire le nombre de racines réelles de P_t, en distinguant selon t.
3. Y a-t-il des racines multiples ?

On note $r(t)$ l'unique racine réelle strictement positive de P_t.

4. Justifier que $r(t) \in]0, 1[$.
5. Écrire une fonction Python `approxime(t, epsilon)` qui prend en argument le paramètre $t > 0$ et un nombre $\varepsilon > 0$ et qui cherche par dichotomie une approximation de $r(t)$, renvoyant un couple (a, b) tel que $r(t) \in [a, b]$ et $|b - a| < \varepsilon$.

6. On fixe $0 < t_1 < t_2$.
   (a) Déterminer le signe de $P_{t_1}(r(t_2))$.
   (b) En déduire le sens de variations de la fonction $t \mapsto r(t)$ sur $]0, +\infty[$.
7. (a) Justifier que r se prolonge par continuité en 0. On note encore r ce prolongement.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{t \to 0^+} r(t)$.
8. (a) Justifier que $\ell = \lim\limits_{t \to +\infty} r(t)$ existe et est fini.
   (b) Montrer par l'absurde qu'on ne peut pas avoir $\ell > 0$. En déduire la valeur de ℓ.
9. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4(1-x^5)}{5x^4}$.
   (a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1]$ vers un intervalle à déterminer.
   (b) Montrer que r est la bijection réciproque de f, et en déduire que r est continue sur $[0, +\infty[$.
10. (a) On suppose maintenant $t < 0$, justifier que P_t admet encore une unique racine réelle strictement positive, qu'on note encore $r(t)$.
    (b) Écrire une fonction Python `borne(t)` qui prend en argument le réel t supposé strictement négatif, et qui renvoie le plus petit **entier** $k \geqslant 0$ tel que $P_t(k) \geqslant 0$.
    (c) En déduire une fonction `approxime2(t, epsilon)` qui prend en argument le paramètre t supposé cette fois strictement négatif, et qui renvoie un couple (a, b) encadrant $r(t)$ avec un écart garanti strictement inférieur à ε.
    (d) En utilisant la fonction f, justifier que r est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante.
    (e) Donner $\lim\limits_{t \to -\infty} r(t)$.

Exercice

Calculer les limites suivantes.

$$A = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2+x} - 2}{\ln(\frac{x}{2})} \qquad B = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{1 - \cos(3x)} \tag{3}$$

$$C = \lim_{x \to 0} \frac{x^x - 1}{\sin(x^2)} \qquad D = \lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) \ln(e^{\sqrt{n}} + 2) \tag{4}$$