DS 8 Mathématiques partie 2
Correction

Exercice 1. *A.* On écrit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} \tag{1}$$

On reconnait une somme de Riemann, pour la méthode des rectangles à droite, en n rectangles, de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, sur $[0,1]$, continue (il faut dire tout cela !). Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \tag{2}$$

Cette dernière se calcule avec une primitive en arctan, on trouve

$$A = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} \tag{3}$$

B. On écrit

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-k/n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}e^{-k/n} \tag{4}$$

On reconnait une somme de Riemann, pour la méthode des rectangles à droite, en n rectangles, pour la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ sur $[0,1]$, continue. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}e^{-k/n} = \int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

Ceci se calcule avec une intégration par parties en dérivant le x et en intégrant le e^{-x}, on trouve

$$B = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-1} + \Big[-e^{-x}\Big]_0^1 = 1 - \frac{2}{e} \tag{6}$$

Exercice 2. 1. Une application linéaire $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ne peut pas être injective : la dimension de l'image est inférieure ou égale à 3 et, à cause du théorème du rang, il y a un noyau de dimension au moins 1.
Dans ce dernier cas, si le noyau est de dimension 1 et l'image de dimension 3, f_α peut bien être surjective. Si le noyau est de dimension plus grande, alors l'image sera de dimension plus petite et f_α ne sera pas surjective.
N'étant pas injective, f_α n'est dans tous les cas pas bijective.

2. C'est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

3. On échelonne le système linéaire homogène associé (ou bien directement la matrice) : pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, alors $f(x,y,z,t) = (0,0,0)$ est équivalent à

$$\begin{cases} x+2y+\alpha t = 0 \\ x-y+z+t = 0 \\ 2x+y+z+t = 0 \end{cases} \tag{8}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y+\alpha t = 0 \\ -3y+z+(1-\alpha)t = 0 \\ -3y+z+(1-2\alpha)t = 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y+\alpha t = 0 \\ -3y+z+(1-\alpha)t = 0 \\ \alpha t = 0 \end{cases} \tag{10}$$

On distingue alors :

- Si $\alpha \neq 0$, le sytème est de rang 3, la dernière ligne donne $t = 0$, puis z est la seule variable libre. On trouve ensuite $y = \frac{1}{3}z$ puis $x = -\frac{2}{3}y = -\frac{2}{3}z$. Le noyau est de dimension 1 et une base est le vecteur $(-2/3, 1/3, 1, 0)$, on peut aussi prendre $(-2, 1, 3, 0)$.
- Si $\alpha = 0$ alors la dernière ligne est $0 = 0$ donc le système est de rang 2, t et z sont tous les deux des variables libres. La ligne 2 donne $y = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}t$ puis $x = -2y = -\frac{2}{3}z - \frac{2}{3}t$. Une base du noyau est formée des vecteurs $(-2/3, 1/3, 1, 0)$ et $(-2/3, 1/3, 0, 1)$, on peut aussi prendre à la place $(-2, 1, 3, 0)$ et $(-2, 1, 0, 3)$.

4. Par le théorème du rang on en déduit que :
   - Si $\alpha \neq 0$, l'image de f_α est de dimension 3. f_α est en fait surjective et on peut prendre pour base de l'image n'importe quelle base de $\mathbb{R}^3$, par exemple la base canonique !
   - Si $\alpha = 0$, l'image est de dimension 2, une base de l'image est formée par les vecteurs qu'on lit en colonne dans la matrice de f_α correspondant aux inconnues non-libres, c'est-à-dire $(1, 1, 2)$ et $(2, -1, 1)$.

Exercice 3. *f*. On a besoin du DL à l'ordre 4 de l'exponentielle, car en divisant par x le $o(x^4)$ on aura bien le $o(x^3)$. On part donc de $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ d'où

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)}_{u} \tag{11}$$

et on tombe sur le DL de $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$. On calcule alors soigneusement à part

$$u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3) \tag{12}$$

$$u^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \tag{13}$$

$$u^3 = \frac{x^3}{8} + o(x^3) \tag{14}$$

d'où en remplaçant soigneusement

$$\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \ln(1 + u) \tag{15}$$

$$= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{8}\right) + o(x^3) \tag{16}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^3) \tag{17}$$

Ne pas oublier le $o(x^3)$: c'est bien un DL à l'ordre 3, dont le coefficient de x^3 est nul.

g. D'abord on a besoin du DL de la fonction racine en 1 à l'ordre 2 : posant $x = 1 + h$ (et écrivant $\sqrt{1 + h} = (1 + h)^{1/2}$ pour retrouver le DL) alors

$$\sqrt{1 + h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2) \tag{18}$$

On se retrouve donc à devoir calculer

$$\sqrt{1 + h + \left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)\right)} = \sqrt{2 + \frac{3}{2}h - \frac{h^2}{8} + o(h^2)} \tag{19}$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{1 + \underbrace{\frac{3}{4}h - \frac{h^2}{16} + o(h^2)}_{u}} \tag{20}$$

Ceci fait apparaitre le DL de $\sqrt{1 + u}$, avec un nouveau u, qu'on devra ensuite multiplier par $\sqrt{2}$. On calcule donc soigneusement à part, toujours à l'ordre 2

$$u = \frac{3}{4}h - \frac{h^2}{16} + o(h^2) \tag{21}$$

$$u^2 = \frac{9}{16}h^2 + o(h^2) \tag{22}$$

donc

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}h - \frac{h^2}{16}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{9}{16}h^2\right) + o(h^2) \tag{23}$$

$$= 1 + \frac{3}{8}h - \frac{13}{128}h^2 + o(h^2) \tag{24}$$

Pour finir on multiplie son résultat par $\sqrt{2}$ et on l'exprime en fonction de $x-1$ et pas de h :

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} \underset{x\to 1}{=} \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{8}(x-1) - \frac{13\sqrt{2}}{128}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \tag{25}$$

Exercice 4. TAF pour la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ entre 1 et $\frac{4}{3}$ (on reconnait $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$) : il existe $c \in]1, 4/3[$ tel que $\arctan(\frac{4}{3}) - \arctan(1) = (\frac{4}{3} - 1) \times \frac{1}{1+c^2}$, c'est à dire

$$1 < c < \frac{4}{3} \quad \text{tel que} \quad \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+c^2} \tag{26}$$

On a alors

$$1 < c^2 < \frac{16}{9} \tag{27}$$

$$2 < 1 + c^2 < \frac{25}{9} \tag{28}$$

$$\frac{9}{25} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{2} \tag{29}$$

$$\frac{3}{25} < \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{6} \tag{30}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+c^2} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6} \tag{31}$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

Exercice 5. 1. On calcule

$$\ln\left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right) = \ln((2n)!) - \ln(n) - \ln(n^n) \tag{32}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - n\ln(n) \tag{33}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) - n\ln(n) \tag{34}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \Big(\ln(k) - \ln(n)\Big) \qquad \text{(il y a } n \text{ termes)} \tag{35}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \tag{36}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{n+j}{n}\right) \qquad \text{(poser } k = n+j\text{)} \tag{37}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{j}{n}\right) \tag{38}$$

On pouvait aussi partir de la formule donnée

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+n}{n}\right) \tag{39}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+n) - \ln(n)\Big) \tag{40}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+n) - n\ln(n) \tag{41}$$

qui permet de bien comprendre comment on passe de l'une à l'autre, le changement d'indice est nécessaire.

2. Posant $C_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!\,n^n}}$, on a

$$\ln(C_n) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right) \tag{42}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \tag{43}$$

Grâce à la question intermédiaire, on reconnait une somme de Riemann, pour la méthode des rectangles à droite, en n rectangles, pour la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ qui est continue sur $[0,1]$. On en déduit donc

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(C_n) = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x \tag{44}$$

Cette dernère se calcule avec une intégration par parties $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln(1+x)$, on trouve

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(2) - \int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\,\mathrm{d}x = 2\ln(2)-1 \tag{45}$$

Mais ceci est $\ln(C)$ et pas C, donc

$$C = \exp(2\ln(2)-1) = \frac{4}{e} \tag{46}$$