DS 8 Mathématiques partie 2

Exercice 1. Calculer avec une somme de Riemann :

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \qquad\qquad B = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k e^{-k/n} \tag{1}$$

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f_\alpha : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) &\longmapsto (x+2y+\alpha t, x-y+z+t, 2x+y+z+t) \end{aligned} \tag{2}$$

1. Sans faire encore de calculs, est-il possible que f_α soit injective ? Surjective ? Bijective ? Justifier.
2. Écrire la matrice de f_α, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la dimension et une base de $\mathrm{Ker}(f_\alpha)$, en fonction de α.
4. En déduire la dimension et une base de $\mathrm{Im}(f_\alpha)$, en fonction de α.

Exercice 3. Calculer les développements limités suivants :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \quad \text{ordre 3 en } x=0 \tag{3}$$

$$g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} \quad \text{ordre 2 en } x=1 \tag{4}$$

Exercice 4. Démontrer l'encadrement suivant (*indication : TAF*) :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6} \tag{5}$$

Exercice 5.

1. Justifier que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \ln\left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \tag{6}$$

2. En déduire

$$C = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!\,n^n}} \tag{7}$$