Programme de colle 5
17 au 21 octobre 2022

Thème : 100 % nombres complexes, y compris sous forme exponentielle. On n'oublie donc pas pour autant la trigonométrie...

Notions

- Nombres complexes sous forme algébrique : définitions, opérations, écriture sous forme algébrique, conjugué, module, interprétation géométrique.
- Application à la trigonométrie, linéarisation.
- Nombres complexes sous forme exponentielle : exponentielle complexe (d'abord cas du module 1), écriture sous forme exponentielle, module et argument, application (puissances, racines carrées), résolution des équations du second degré.

Savoir-faire

- Écrire un nombre complexe sous forme algébrique, manipuler des sommes et produits, les placer sur le plan complexe et interpréter géométriquement.
- Manipuler des nombres complexes sous forme $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Application à la linéarisation des expressions trigonométriques.
- Écrire un nombre complexe sous forme exponentielle, en lien avec les valeurs remarquables des fonctions trigonométriques ou en utilisant les fonctions trigonométriques réciproques.
- Appliquer la forme exponentielle pour calculer des produits ou puissances de nombres complexes.
- Résoudre des équations polynomiales du second degré à coefficients réels. Utiliser les sommes et produits des racines. Résoudre divers types d'équations en une variable $z \in \mathbb{C}$.
- Déterminer des racines carrées d'un nombre complexe en passant par la forme exponentielle *(l'autre méthode n'a pas été vue...)*
- Utiliser la technique de factorisation par l'angle moitié.

Questions de cours

Formulation un peu libre.

- Rappeler le produit de nombres complexes, distributivité de la multiplication sur l'addition (*l'associativité a été laissée en exercice*).
- Unicité de l'écriture sous forme algébrique d'un nombre complexe (dans la définition « naïve » où $i \notin \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$).
- Rappeler et démontrer des propriétés élémentaires de la conjugaison.
- Rappeler et démontrer des propriétés élémentaires du module.
- Inégalité triangulaire (version 1 : $|z + w| \leqslant |z| + |w|$) dans les nombres complexes (*le cas d'égalité a été vu mais dans une question de cours on pourra s'en passer*).
- Rappeler et démontrer des propriétés élémentaires de l'exponentielle complexe ($e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$).
- Donner les solutions de l'équation $z^2 = c$ (pour $c \in \mathbb{C}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$), démonstration.
- Donner les solutions de l'équation $az^2 + bz + z = 0$ ($(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$), démonstration.