Programme de colle 6
7 au 11 novembre 2022

Reprise du programme précédent : nombres complexes, notamment sous forme exponentielle et avec application aux équations.

Notions

— Nombres complexes sous forme exponentielle : exponentielle complexe (d'abord cas du module 1), écriture sous forme exponentielle, module et argument, applications (puissances, racines carrées), résolution des équations du second degré.
— Notions générales sur les suites réelles : croissance, majoration, suites bornées.
— Suites de récurrence d'ordre un : suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques ; démonstrations par récurrence simple.
— Suites de récurrence linéaires d'ordre deux : récurrence double (la suite est déterminée par la relation de récurrence et par ses deux premiers termes), linéarité, équation caractéristique, classification et forme générale des solutions.

Savoir-faire

— Manipuler des nombres complexes sous forme $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Application à la linéarisation des expressions trigonométriques.
— Écrire un nombre complexe sous forme exponentielle, en lien avec les valeurs remarquables des fonctions trigonométriques ou en utilisant les fonctions trigonométriques réciproques.
— Appliquer la forme exponentielle pour calculer des produits ou puissances de nombres complexes.
— Résoudre des équations polynomiales du second degré à coefficients réels. Utiliser les sommes et produits des racines. Résoudre divers types d'équations en une variable $z \in \mathbb{C}$.
— Déterminer des racines carrées d'un nombre complexe en passant par la forme exponentielle *(l'autre méthode n'a pas été vue...)*
— Utiliser la technique de factorisation par l'angle moitié.
— Récurrence simples ou doubles *(le retour ! mais à partir de maintenant on sera plus exigeant !)*
— Donner l'expression du terme général d'une suite arithmétique, géométrique ou arithmético-géométrique *(peu d'exercices faits)*
— Donner l'expression du terme général d'une suite de récurrence linéaire d'ordre deux, dans chacun des trois cas.
— Reconnaitre qu'une expression du type $\lambda^n \pm \mu^n$ est le terme général d'une suite de récurrence linéaire d'ordre deux et retrouver la relation de récurrence.
— Traiter des suites de récurrence se ramenant par changement de variable aux cas précédents.
— *Pas d'étude générale des suites $u_{n+1} = f(u_n)$.*
— *Possibilité d'étudier des majorations de suites, mais pas d'étude de convergence : on se limite à ce qu'on peut dire immédiatement après avoir écrit le terme général.*
— *Bientôt : écrire une petite fonction Python...*

Questions de cours

— Rappeler et démontrer des propriétés élémentaires de l'exponentielle complexe ($e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$).
— Donner les solutions de l'équation $z^2 = c$ (pour $c \in \mathbb{C}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$), démonstration.
— Donner les solutions de l'équation $az^2 + bz + z = 0$ ($(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$), démonstration.
— Suite bornée : majorée et minorée si et seulement si majorée en valeur absolue.
— Une suite est bornée si et seulement si elle est bornée à partir d'un certain rang.
— Montrer que si on a des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors les suites $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.
— Terme général d'une suite arithmétique. Démonstration.
— Terme général d'une suite géométrique. Démonstration.
— *(suites arithmético-géométriques : méthode à connaitre, appliquer sur des exemples directement)*
— Suites récurrentes linéaires d'ordre deux : le théorème a été découpé comme suit (en question de cours, choisir un ou des morceaux), partant de la relation de récurrence $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$:

- La suite est déterminée uniquement par ses deux premiers termes *(c'est le seul passage qui fait intervenir la récurrence double)*
- Linéarité.
- Équation caractéristique : une suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ satistfait la relation de récurrence si et seulement si q vérifie l'équation $aq^2 + bq + c = 0$.
- Forme des suites dans chacun des cas $\Delta > 0$, $\Delta < 0$, $\Delta = 0$.
- Les deux premiers termes déterminent uniquement les constantes *(démontré seulement pour $\Delta > 0$, laissé en exercice pour les autres)*.