Programme de colle 7
14 au 18 novembre 2022

Fin des questions portant uniquement sur les nombres complexes.
Thème : suites et sommes. Apparition des questions d'informatique.

Notions

- Notions générales sur les suites réelles : croissance, majoration, suites bornées.
- Suites de récurrence d'ordre un : suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques ; démonstrations par récurrence simple.
- Suites de récurrence linéaires d'ordre deux : récurrence double (la suite est déterminée par la relation de récurrence et par ses deux premiers termes), linéarité, équation caractéristique, classification et forme générale des solutions.
- Suites plus générales d'ordre un, du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Le symbole somme :
  - Propriétés découlant des propriétés de l'addition.
  - Sommes à connaitre : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} q^k$ $(q \in \mathbb{C} \setminus \{1\})$
  - Changement d'indice : uniquement ceux en $j = k+1$
  - Famille indexée par un ensemble fini. Somme des termes pairs, impairs, séparation des termes pairs et impairs.
  - *Pas de somme double.*
  - *Le mot* « somme téléscopique » *n'a pas été prononcé, mais l'idée a cependant été appliquée avec un changement d'indice pour le calcul de* $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Savoir-faire

- Récurrence simples ou doubles *(sous formes variées, à partir de maintenant on sera plus exigeant !)*
- Donner l'expression du terme général d'une suite arithmétique, géométrique ou arithmético-géométrique
- Donner l'expression du terme général d'une suite de récurrence linéaire d'ordre deux, dans chacun des trois cas.
- Reconnaitre qu'une expression du type $A\lambda^n \pm B\mu^n$ est le terme général d'une suite de récurrence linéaire d'ordre deux et retrouver la relation de récurrence.
- Traiter des suites de récurrence se ramenant par changement de variable aux cas précédents.
- Étudier des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$, en lien avec la croissance de la fonction f et le signe de $f(x) - x$ *(peu d'exercices faits, doit être très guidé)*
- *Possibilité d'étudier des majorations de suites, mais pas d'étude de convergence : on se limite à ce qu'on peut dire immédiatement après avoir écrit le terme général.*
- Calculer des sommes en utilisant notamment les 3 sommes à connaitre $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} q^k$.
- Calculer des sommes présentées de diverses manières, notamment : $\sum_{k\in[\![1,n]\!],\, k \text{ pair}}$, $\sum_{k\in[\![1,n]\!],\, k \text{ impair}}$. Séparer les termes d'indices pairs et impairs.
- Écrire une fonction Python qui calcule les termes d'une suite, soit pour retourner directement le terme d'indice n, ou pour les afficher uns par uns, soit pour retourner la liste des n premiers termes.
- Écrire une fonction Python qui calcule la somme, soit de termes présentés dans une liste, soit de termes d'une suite à calculer en même temps.

Questions de cours

- Suite bornée : majorée et minorée si et seulement si majorée en valeur absolue.
- Une suite est bornée si et seulement si elle est bornée à partir d'un certain rang.
- Montrer que si on a des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors les suites $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.
- Terme général d'une suite arithmétique. Démonstration.
- Terme général d'une suite géométrique. Démonstration.
- *(suites arithmético-géométriques : méthode à connaitre, appliquer sur des exemples directement)*

- Suites récurrentes linéaires d'ordre deux : le théorème a été découpé comme suit (en question de cours, choisir un ou des morceaux), partant de la relation de récurrence $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$:
  - La suite est déterminée uniquement par ses deux premiers termes *(c'est le seul passage qui fait intervenir la récurrence double)*
  - Linéarité.
  - Équation caractéristique : une suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ satistfait la relation de récurrence si et seulement si q vérifie l'équation $aq^2 + bq + c = 0$.
  - Forme des suites dans chacun des cas $\Delta > 0$, $\Delta < 0$, $\Delta = 0$.
  - Les deux premiers termes déterminent uniquement les constantes *(démontré seulement pour $\Delta > 0$, laissé en exercice pour les autres).*
- Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, soit par récurrence, soit en multipliant par $1 - q$ et avec un changement d'indice.
- *Les formules pour $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$ ont bien évidemment été démontrées, mais dans la section* Récurrence *du chapitre* Méthodes de démonstration *et avant l'introduction du symbole somme, elles ne font donc pas partie des questions de cours maintenant mais sont à connaitre.*