Programme de colle 8
21 au 25 novembre 2022

Thème : tout sur sommes et produits.
Questions d'informatique possible.

Notions

- Le symbole somme :
  - Propriétés élémentaires découlant des propriétés de l'addition, sommes de base $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} q^k$, changement d'indice.
  - Famille indexée par un ensemble fini. Somme des termes pairs, impairs, séparation des termes d'indices pairs et impairs. Sommes doubles et interversion de l'ordre de sommation.
  - Somme des termes successifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Le symbole produit :
  - Propriétés élémentaires découlant des propriétés du produit, propriétés analogues à celles de la somme.
  - Fonction factorielle et applications.
  - Coefficients binomiaux, calculs et propriétés élémentaires, triangle de Pascal.
- Formule du binôme de Newton, formule $a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$

Savoir-faire

- Calculer des sommes en utilisant les propriétés élémentaires et les 3 sommes à connaitre $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} q^k$, ainsi que les sommes de termes successifs de suites arithmétiques ou géométriques.
- Utiliser des changements d'indices (notamment en $j = k+1$ ou $j = k-1$ ou $j = n-k$), application aux sommes téléscopiques.
- Calculer des sommes présentées de diverses manières, notamment : $\sum_{k \in [\![1,n]\!],\, k \text{ pair}}$, $\sum_{k \in [\![1,n]\!],\, k \text{ impair}}$. Séparer les termes d'indices pairs et impairs. Calculer des sommes doubles de diverses manières.
- Calculer des produits notamment à partir des fonctions puissances et factorielles, et des propriétés élémentaires. Propriétés analogues aux sommes, notamment séparation des indices pairs et impairs, téléscopages.
- Écrire une fonction Python qui calcule la somme ou le produit, soit de termes présentés dans une liste, soit de termes d'une suite à calculer en même temps.
- Utiliser les propriétés élémentaires des coefficients binomiaux, retrouver rapidement leurs valeurs remarquables ou leurs petites valeurs avec le triangle de Pascal.
- **Utiliser** la formule du binôme de Newton pour développer, savoir l'écrire pour des petites valeurs de n. Appliquer sur des polynômes, ou appliquer dans les nombres complexes pour les problèmes de linéarisation d'expressions trigonométriques.
- **Reconnaitre** la formule du binôme de Newton, ou la faire apparaitre, dans diverses situations. Calculer des sommes faisant intervenir des coefficients binomiaux.

Questions de cours

- Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ par récurrence ou bien en multipliant par $1-q$ et avec changement d'indice téléscopique.
- Somme des termes successifs d'une suite arithmétique (méthode « à la Gauss » TD 7 exercice 1.2).
- Somme des termes successifs d'une suite géométrique (méthode « téléscopique » TD 7 exercice 1.1).
- Formule pour $\sum_{k=1}^{n} k^2$ à partir de $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3)$ (TD 7 exercice 2).
- Formule de Pascal sur les coefficients binomiaux.
- Formule du binôme de Newton.
- Formule $a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$