Programme de colle 20
13 au 17 mars 2023

Thème : 100 % limites de suites.

Notions

— Définition formelle de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ et utilisation de la définition. Unicité de la limite.
— Suites extraites de rangs pairs et impairs.
— Passage de la limite aux inégalités.
— Théorème d'encadrement des gendarmes.
— Théorème de la limite monotone.
— Théorème des suites adjacentes.
— Opérations sur les suites et les limites.
— Notation petit o, comparaisons des suites usuelles.
— Équivalents de suites.

Savoir-faire

— Démontrer des petites propriétés en utilisant la définition formelle de limite.
— Montrer qu'une suite a une limite en utilisant les théorèmes d'encadrement des gendarmes.
— Montrer qu'une suite a une limite en utilisant le théorème de la limite monotone.
— Montrer qu'une suite a ou n'a pas de limite, en utilisant notamment les suites extraites de rangs pairs et impairs.
— Montrer qu'une suite a une limites en utilisant des suites adjacentes.
— Déterminer des limites en utilisant les opération usuelles sur les suites.
— Déterminer des limites en utilisant la notion de petit o et les comparaisons usuelles de suites, éventuellement en raisonnant avec des équivalents *(je n'ai pas vraiment eu le temps de montrer des exemples d'utilisation des équivalents usuels, donc on n'insiste pas sur les équivalents cette semaine).*
— Étudier une suite définie implicitement comme solution d'une équation $f_n(x) = 0$.
— Étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Questions de cours

— Unicité de la limite d'une suite (cas de la limite finie).
— Une suite convergente est bornée.
— Passage de la limite aux inégalités : si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ et si ces deux suites convergent alors $\lim_n u_n \leqslant \lim_n v_n$
— Une suite converge si et seulement si les suites extraites de rang pair et impair convergent vers la même limite.
— Théorème d'encadrement des gendarmes (version limite finie ou bien infinie « le gros gendarme »).
— Théorème de la limite monotone (version limite finie ou bien infinie).
— Théorème des suites adjacentes.
— Limite de la somme de suites.
— Le produit d'une suite bornée par une suite convergeant vers 0 converge vers 0 ; ou bien, le produit d'une suite tendant vers $+\infty$ par une suite minorée par une constante strictement positive, tend vers $+\infty$.
— Si (u_n) converge vers $\ell > 0$ alors $\frac{1}{u_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang et converge vers $\frac{1}{\ell}$.
— Comparaison $\ln(n) = o_{n\to+\infty}(n^\alpha)$ ou bien $n^\alpha = o_{n\to+\infty}(q^n)$ ou bien $q^n = o_{n\to+\infty}(n!)$ ($\alpha > 0$, $q > 1$).