Programme de colle 25
17 au 21 avril 2023

Notions

- Continuité
  - Notion de continuité, continuité des fonctions usuelles.
  - Prolongement de fonctions par continuité.
  - Théorèmes des bornes. Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de la bijection continue.
- Espaces vectoriels
  - Calculs dans $\mathbb{R}^n$.
  - Sous-espaces vectoriels. Intersection, sous-espace engendré.
  - Familles libres.

Savoir-faire

- Continuité
  - Étudier la continuité ou le prolongement par continuité d'une fonction.
  - Appliquer soigneusement le théorème des valeurs intermédiaires ou de la bijection continue.
  - Appliquer manuellement la méthode de dichotomie ou écrire un programme Python de recherche de solution.
  - Utiliser le théorème des bornes.
- Espaces vectoriel
  - *Pas de dimension, pas d'extraction de base ; on révise les systèmes linéaires et la géométrie, éventuellement avec des paramètres, avec des sous-espaces vectoriels paramétrés ou donnés par des équations. Les espaces vectoriels sont tous $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.*
  - Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel.
  - Montrer qu'une famille de vecteurs est libre ou liée.
  - Manipuler les sous-espaces donnés par des équations ou par un paramétrage, faire le lien avec des problèmes de géométrie en dimension 2 ou 3.

Questions de cours

- Citer précisément le principe du prolongement par continuité + donner plusieurs exemples classiques.
- Citer précisément le théorème des bornes + donner plusieurs contre-exemples dans lesquels la conclusion est fausse si on enlève une hypothèse.
- Théorème des valeurs intermédiaires (on pourra se restreindre pour la démonstration au cas $f(a) \leqslant 0$, $f(b) \geqslant 0$; on rédige en détail au moins la construction des suites et la conclusion).
- Théorème de la bijection continue (citer précisément, démontrer au moins l'injectivité et la continuité de la réciproque, dans le cas strictement croissant).
- Équivalence entre les définitions de sous-espace vectoriel ($\vec{u}+\vec{v} \in F$ et $\lambda\vec{u} \in F$; $\lambda\vec{u}+\vec{v} \in F$; $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \in F$) *(on rédige au moins deux implications)*.
- L'intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ est encore un sous-espace vectoriel.
- $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les vecteurs $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$.
- Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ est libre si et seulement si $\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, $\forall(\mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i\vec{u}_i = \sum_{i=1}^p \mu_i\vec{u}_i \Longrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda_i = \mu_i$.
- Une famille de vecteurs est liée et si seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.