Programme de colle 26
9 au 12 mai 2023

Notions

Espaces vectoriels.

- Calculs dans $\mathbb{R}^n$.
- Sous-espaces vectoriels. Intersection, sous-espace engendré.
- Familles libres, familles génératrices, bases.
- Matrice d'une famille de vecteurs.
- Dimension, rang.

Savoir-faire

- Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel.
- Montrer qu'une famille de vecteurs est libre ou liée, ou est génératrice, ou est une base.
- Manipuler les sous-espaces donnés par des équations ou par un paramétrage, passer de l'un à l'autre, faire le lien avec des problèmes de géométrie en dimension 2 ou 3 et avec la totalité du chapitre sur les systèmes linéaires.
- Utiliser les inégalités sur la dimension. Donner la dimension après avoir calculé une base.
- Écrire une famille de vecteurs dans une base.
- Calculer le rang d'une famille de vecteurs, en extraire une base.

Questions de cours

Les sous-espaces vectoriels sont tous dans $\mathbb{R}^n$, éventuellement $\mathbb{C}^n$.

- Équivalence entre les définitions de sous-espace vectoriel ($\vec{u}+\vec{v} \in F$ et $\lambda\vec{u} \in F$; $\lambda\vec{u}+\vec{v} \in F$; $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \in F$) *(on rédige au moins deux implications)*.
- L'intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ est encore un sous-espace vectoriel.
- $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les vecteurs $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$.
- Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est libre si et seulement si $\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, $\forall(\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i\vec{u}_i = \sum_{i=1}^p \mu_i\vec{u}_i \Longrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda_i = \mu_i$ (« libre ssi leurs combinaisons linéaires ont des coefficients uniques »).
- Une famille de vecteurs est liée et si seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Si $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille libre d'un sous-espace vectoriel F, alors soit la famille est une base de F soit il existe un vecteur $\vec{u}_{n+1} \in F$ tel que $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1})$ est encore une famille libre de F (« compléter une famille libre en base »).