Programme de colle 27
22 au 26 mai 2023

Notions

- Espaces vectoriels (sous-espaces de $\mathbb{R}^n$)
  - Familles libres, familles génératrices, bases.
  - Matrice d'une famille de vecteurs.
  - Dimension, rang.
- Dérivation
  - Définition de la dérivée à la lumière du chapitre sur les limites, dérivée à gauche et à droite, notion de développement limité à l'ordre 1.
  - Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis. Application aux théorèmes connus sur le sens de variation des fonctions.
  - Dérivées supérieures, classes de régularité $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$ et opérations.
- Intégration
  - Notion de somme de Riemann à gauche ou à droite (méthode des rectangles).

Savoir-faire

- Espaces vectoriels
  - Montrer qu'une famille de vecteurs est libre ou liée, ou est génératrice, ou est une base ; éventuellement avec des paramètres.
  - Manipuler les sous-espaces donnés par des équations ou par un paramétrage et passer de l'un à l'autre.
  - Écrire une famille de vecteurs dans une base.
  - Calculer le rang d'une famille de vecteurs, en extraire une base, en utilisant des systèmes linéaires ou directement avec des matrices. Utiliser et raisonner avec les inégalités sur la dimension.
- Dérivation
  - Calculer des limites en utilisant les taux de variations et les développements limités à l'ordre 1.
  - Utiliser les théorèmes de Rolle et des accroissements finis.
  - Démontrer des inégalités en utilisant le théorème des accroissements finis.
  - Calculer des dérivées supérieures, raisonner avec les classes de fonctions $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$.
  - *Je n'ai pas encore vraiment parlé des problèmes de prolongements $\mathcal{C}^n$.*
- Intégration
  - Révisions sur le calcul d'intégrales.
  - Calculer des sommes de Riemann à l'aide d'intégrales.

Questions de cours

- Si $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille libre d'un sous-espace vectoriel F, alors soit la famille est une base de F soit il existe un vecteur $\vec{u}_{n+1} \in F$ tel que $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1})$ est encore une famille libre de F (« compléter une famille libre en base »).
- Une fonction est dérivable en a **si et seulement si** elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a.
- Dérivée d'un produit, ou d'une composée, en utilisant un développement limité à l'ordre 1.
- Démontrer le théorème de Rolle ou le théorème des accroissements finis.
- Démontrer qu'une fonction f dérivable sur I est croissante **si et seulement si** $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$ *(attention dans le cours, la réciproque n'est pas au même endroit que le sens direct).*
- Montrer par récurrence que le produit, ou la composée, de fonctions $\mathcal{C}^n$ est encore $\mathcal{C}^n$.
- Montrer la linéarité de l'intégrale (pour la somme, ou pour le produit par une constante) en passant par les sommes de Riemann.
- Démontrer la propriété de positivité stricte de l'intégrale.