Programme de colle 2
25 au 29 septembre 2023

Notions

Chapitre 1 : Logique

- Assertions : exemples, constructions avec *et*, *ou*, *non*, lois de Morgan, distributivité, implication et équivalence.
- Ensembles : diverses constructions, union, intersection, différence, complémentaire, leurs propriétés de distributivité et lois de Morgan, ensemble des parties, produit cartésien, listes.
- Quantificateur : pour tout, il existe, négation, assertions à plusieurs quantificateurs et problème de l'ordre des quantificateurs.

Chapitre 2 : Méthodes de démonstration

- Démontrer des implications, contraposée, absurde.
- Démontrer des inclusions ou des égalités d'ensembles.
- Démontrer des assertions avec $\forall x$ (dont disjonction de cas), $\exists x$ (dont théorème des valeurs intermédiaires, analyse-synthèse, unicité).
- Démonstration par récurrence simple ou double.

Chapitre 3 : Nombres réels

- Définitions générales autour des opérations algébriques (commutativité, associativité, élément neutre, etc) et de la relation d'ordre, et leurs propriétés élémentaires.
- La valeur absolue et l'inégalité triangulaire.
- Parties de $\mathbb{R}$: parties majorées et minorées, maximum et minimum, bornes supérieurs et inférieures, intervalles.

Savoir-faire

- Démontrer une équivalence entre assertions en utilisant une table de vérité.
- Manipuler et comprendre des ensembles sous différentes formes (paramétrés ou par des propriétés, avec le produit cartésien).
- Lire et comprendre une assertion avec plusieurs quantificateurs, écrire la négation, comprendre le problème de l'ordre.
- Utiliser les notions de logique ci-dessus pour rédiger une petite démonstration : implication, contraposée, équivalence par équivalences successives ou par implication et réciproque, inclusion ou égalité d'ensembles, quantificateur $\forall$ (disjonction de cas), quantificateur $\exists$ (analyse-synthèse, unicité, théorème des valeurs intermédiaires).
- De nombreux exemples proviennent : de la valeur absolue (fait : $\frac{x+|x|}{2} = \mathrm{Max}(x, 0)$), de la parité des entiers (fait : n pair $\Longrightarrow n^2$ pair ; n impair $\Longrightarrow n^2$ impair ; $\frac{n(n+1)}{2}$ est entier), des égalités d'ensembles avec des systèmes linéaires, des fonctions (fait : $\forall f$, $\exists (p, i)$ uniques avec p paire, i impaire, telles que $f = p + i$), des suites réelles (exprimer des propriétés avec des quantificateurs).
- Démontrer par récurrence simple ou double, quand l'hypothèse de récurrence apparait clairement.
- Manipuler la valeur absolue, par disjonction de cas ou directement avec l'inégalité triangulaire.

Questions de cours

- Énoncer les lois de Morgan sur les assertions, en démontrer une avec une table de vérité.
- Distributivité de *et* et de *ou* sur les assertions, en démontrer une avec une table de vérité.
- Définition de la contraposée, montrer qu'une implication est équivalente à sa contraposée.
- Énoncer les lois de Morgan pour des ensembles, et en démontrer une.
- Idem avec la distributivité de l'union et de l'intersection.
- Transitivité et anti-symétrie de l'inclusion, et démonstration.
- Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant M \Longleftrightarrow -M \leqslant x \leqslant M$
- Démontrer l'inégalité triangulaire (version de base).
- Définition du maximum d'une partie de $\mathbb{R}$, démonstration de l'unicité.
- Une partie de $\mathbb{R}$ est majorée et minorée si et seulement si elle est majorée en valeur absolue.