Programme de colle 6
6 au 10 novembre 2023

Notions

Chapitre 5 : Nombres complexes

- Nombres complexes sous forme algébrique. Module, résolutions d'équations.
- Nombres complexes sous forme exponentielle. Module, argument, calcul de puissances, calcul de racines carrées, applications à la trigonométrie.

Chapitre 6 : Suites

- Quelque notions générales, suites croissantes, décroissantes, constantes, monotones, majorées, minorées, bornées, très brèves notions de convergence.
- Suites récurrentes d'ordre 1. Suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Équation caractéristique, linéarité. Expression du terme général dans chacun des cas.
- Programmes Python de calcul de termes de suites.

Savoir-faire

- Résoudre des équations avec des nombres complexes.
- Écrire un nombre complexe sous forme exponentielle et calculer avec.
- Calculer des puissances ou des racines carrées de nombres complexes avec la forme exponentielle.
- Linéariser des expressions trigonométriques avec les nombres complexes, utiliser la factorisation par l'angle moitié.
- Donner le terme général d'une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique, ou d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
- Écrire un programme Python qui calcule le n-ième terme d'une suite, ou bien la liste des n premiers termes.
- *Pas d'étude générale des suites non-linéaires cette semaine.*

Questions de cours

- Multiplicativité du module.
- Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.
- Solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, cas $\Delta < 0$ (démonstration).
- Définir $e^{i\theta}$ et montrer $\left|e^{i\theta}\right| = 1$, $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \times e^{i\beta}$, et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
- Racines carrées d'un nombre complexe en passant par la forme exponentielle.
- La somme et le produit de suites bornées est encore borné.
- Une suite est bornée si et seulement si elle est bornée à partir d'un certain rang.
- Terme général d'une suite arithmétique, ou géométrique, avec démonstration.
- Terme général d'une suite arithmético-géométrique (ne pas connaitre la formule finale pas cœur, mais connaitre la méthode et savoir la retrouver).
- *Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : la preuve ayant été découpée en plusieurs morceaux et sans rédiger de récurrence, on pourra combiner plusieurs questions parmi les suivantes (notation :* $(*)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$*).*
  - Équation caractéristique associée à $(*)$.
  - Linéarité pour $(*)$.
  - Cas $\Delta > 0$, décrire toutes les suites vérifiant $(*)$.
  - Cas $\Delta < 0$, décrire toutes les suites, exprimées uniquement en termes de fonctions réelles, vérifiant $(*)$.
  - Cas $\Delta = 0$, montrer que si q est racine de l'équation caractéristique alors $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie aussi $(*)$.