Programme de colle 7
12 au 15 novembre 2024

Notions

↳ *En un coup d'œil, les notions qui ont été vues en cours et sur lesquelles portent les colles de la semaine.*

Chapitre 5 : Nombres complexes

- Angle moitié.

Chapitre 6 : Suites

- Quelques notions générales : croissance, majoration, propriété vraie à partir d'un certain rang.
- Suites récurrentes d'ordre 1. Suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2, dans chacun des trois cas.
- Programmes Python de calcul du terme d'indice n d'une suite ; de la liste des n premiers termes.

Chapitre 7 : Sommes et produits

- Le symbole $\sum$, ses propriétés élémentaires, sommes de référence $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} q^k$.
- Somme d'une famille indexée par un ensemble fini. Termes d'indice pair et impair, séparation. Décalage d'indices, sommes téléscopiques.
- Sommes doubles, interversion de la somme, carré ou triangle d'indices.
- Produits, la fonction factoriel.
- Programmes Python de calculs de sommes et de produits.
- *Pas encore de renversement d'indice ; pas encore de somme des termes successifs d'une suite arithmétique (« à la Gauss ») ; pas encore de coefficients binomiaux.*

Savoir-faire

↳ *Description des compétences attendues et des types d'exercices possibles.*

- Donner une formule pour le terme d'indice n d'une suite arithmétique ou géométrique ou arithmético-géométrique.
- Donner une formule pour le terme d'indice n d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dans chacun des trois cas.
- Écrire une fonction Python qui renvoie le terme d'indice n d'une suite donnée, ou bien la liste des n premiers termes.
- Calculer des sommes, notamment à l'aide de leurs propriétés usuelles et des sommes de référence $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} q^k$. Séparer les termes d'indice pairs et impairs. Manipuler des décalages d'indice et des sommes téléscopiques.
- Calculer des sommes doubles, cas d'un carré ou d'un triangle d'indices.
- Calculer des produits, la fonction factoriel.
- Écrire un programme Python de calcul de somme ou de produit.

Questions de cours

↳ *Les questions à travailler et à savoir refaire, incluant l'énoncé précis et la démonstration.*

- Terme général d'une suite arithmétique ou géométrique, avec démonstration par récurrence.
- *Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : on note $(*)$ la relation de récurrence $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ ($(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$). L'important est surtout de connaitre les formes des suites dans chaque cas et de savoir expliquer* ***pourquoi*** *elles vérifient $(*)$, pas la réciproque.*
  - Cas $\Delta > 0$: principes de l'équation caractéristique et de linéarité (avec démonstration), en déduire toutes les suites qui vérifient $(*)$.
  - Cas $\Delta < 0$: expliquer comment on trouve toutes les suites qui vérifient $(*)$ exprimées en terme de fonctions trigonométriques réelles.
  - Cas $\Delta = 0$: principe de l'équation caractéristique, et démontrer que si q est l'unique racine de l'équation caractéristique alors $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie aussi $(*)$. En déduire toutes les suites qui vérifient $(*)$.
- Sommes $\sum_{k=1}^{n} k^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ou $\sum_{k=0}^{n} q^k$ ($n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$) à démontrer par récurrence.
- (exercice) Calculer $\sum_{k=0}^{n} e^{ki\theta}$ ($n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$), en déduire $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ ou $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.
- (exercice) Formule $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$) par téléscopage.