Programme de colle 7
13 au 17 novembre 2023

Notions

Chapitre 6 : Suites

- Quelque notions générales, suites croissantes, décroissantes, constantes, monotones, majorées, minorées, bornées, très brèves notions de convergence.
- Suites récurrentes d'ordre 1. Suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Équation caractéristique, linéarité. Expression du terme général dans chacun des cas.
- Programmes Python de calcul de termes de suites.

Chapitre 7 : Sommes et produits

- Le symbole somme, propriétés générales, calcul à partir des sommes de base $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} q^k$.
- Notion de somme d'une famille indexée par un ensemble fini. Application aux termes d'indices pairs et impairs.
- Changement d'indice, dans le cas du décalage, application aux sommes téléscopiques.
- Sommes doubles, sur un carré ou un triangle d'indices.
- Le symbole produit, propriétés générales, la fonction factorielle.
- Programmes Python de calcul de sommes et de produits.

Savoir-faire

- Donner le terme général d'une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique, ou d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ; ou de suites dont l'étude se ramène à celles-ci.
- Écrire un programme Python qui calcule le n-ième terme d'une suite, ou bien la liste des n premiers termes.
- Calculer des sommes, notamment à partir des sommes de base et des propriétés élémentaires (linéarité, séparation).
- Séparer et calculer les sommes des termes d'indices pairs et impairs.
- Effectuer un changement d'indice, application aux sommes téléscopiques (*uniquement des décalages d'indices simples $k = j + 1$ ou $k = j - 1$ cette semaine*)
- Calculer des sommes doubles, sur un carré ou un triangle d'indices.
- Calculer des produits, exprimer le résultat avec les fonctions puissances et factorielles, produits téléscopiques.
- *pas de coefficients binomiaux ni de formule du binôme cette semaine*
- Écrire un programme Python qui calcule une somme ou un produit.

Questions de cours

- La somme et le produit de suites bornées est encore borné.
- Une suite est bornée si et seulement si elle est bornée à partir d'un certain rang.
- Terme général d'une suite arithmétique, ou géométrique, avec démonstration.
- Terme général d'une suite arithmético-géométrique (ne pas connaitre la formule finale pas cœur, mais connaitre la méthode et savoir la retrouver).
- *Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : la preuve ayant été découpée en plusieurs morceaux et sans rédiger de récurrence, on pourra combiner plusieurs questions parmi les suivantes (notation :* $(*)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$*).*
  - Équation caractéristique associée à $(*)$.
  - Linéarité pour $(*)$.
  - Cas $\Delta > 0$, décrire toutes les suites vérifiant $(*)$.
  - Cas $\Delta < 0$, décrire toutes les suites, exprimées uniquement en termes de fonctions réelles, vérifiant $(*)$.
  - Cas $\Delta = 0$, montrer que si q est racine de l'équation caractéristique alors $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie aussi $(*)$.
- Démontrer par récurrence la formule pour $\sum_{k=1}^{n} k$ ou $\sum_{k=1}^{n} k^2$ ou $\sum_{k=0}^{n} q^k$ $(q \in \mathbb{C} \setminus \{1\})$.
- (exercice) Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$.
- Formule $a^n - b^n = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$ $((a, b) \in \mathbb{C}^2)$ par téléscopage.