

Programme de colle 8

20 au 24 novembre 2023

Notions

Chapitre 7 : Sommes et produits

- Le symbole somme, propriétés générales, calcul à partir des sommes de base $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n q^k$.
- Notion de somme d'une famille indexée par un ensemble fini. Application aux termes d'indices pairs et impairs.
- Changement d'indice, application aux sommes télescopiques.
- Sommes doubles, sur un carré ou un triangle d'indices.
- Le symbole produit, propriétés générales, la fonction factorielle.
- Coefficients binomiaux, formule du binôme de Newton.
- Programmes Python de calcul de sommes et de produits.

Savoir-faire

- Calculer des sommes, notamment à partir des sommes de base et des propriétés élémentaires (linéarité, séparation).
- Séparer et calculer les sommes des termes d'indices pairs et impairs.
- Effectuer un changement d'indice, application aux sommes télescopiques.
- Calculer des sommes doubles, sur un carré ou un triangle d'indices.
- Calculer des produits, exprimer le résultat avec les fonctions puissances et factorielles, produits télescopiques.
- Calculer des coefficients binomiaux.
- Utiliser la formule du binôme de Newton.
- Écrire un programme Python qui calcule une somme ou un produit.

Questions de cours

- Démontrer par récurrence la formule pour $\sum_{k=1}^n k$ ou $\sum_{k=1}^n k^2$ ou $\sum_{k=0}^n q^k$ ($q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$).
- (exercice) Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$.
- Formule $a^n - b^n = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$ ($(a, b) \in \mathbb{C}^2$) par télescopage.
- Somme des termes successifs d'une suite arithmétique « à la Gauss ».
- Formule de Pascal sur les coefficients binomiaux.
- Formule du binôme de Newton.
- (exercice) Calcul de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$.