Programme de colle 8
18 au 22 novembre 2024

Notions

↳ *En un coup d'œil, les notions qui ont été vues en cours et sur lesquelles portent les colles de la semaine.*

Chapitre 7 : Sommes et produits

- Le symbole $\sum$, ses propriétés élémentaires, sommes de référence $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} q^k$.
- Somme d'une famille indexée par un ensemble fini. Termes d'indice pair et impair, séparation. Changements d'indices, sommes téléscopiques.
- Sommes doubles, interversion de la somme, carré ou triangle d'indices.
- Produits, la fonction factoriel, les coefficients binomiaux.
- La formule du binôme de Newton.
- Programmes Python de calculs de sommes et de produits.

Savoir-faire

↳ *Description des compétences attendues et des types d'exercices possibles.*

- Calculer des sommes, notamment à l'aide de leurs propriétés usuelles et des sommes de référence $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} q^k$. Séparer les termes d'indice pairs et impairs. Manipuler des changements d'indice et des sommes téléscopiques.
- Calculer des sommes doubles, cas d'un carré ou d'un triangle d'indices.
- Calculer des produits, la fonction factoriel.
- Utiliser la formule du binôme de Newton, calculer avec les coefficients binomiaux.
- Écrire un programme Python de calcul de somme ou de produit.

Questions de cours

↳ *Les questions à travailler et à savoir refaire, incluant l'énoncé précis et la démonstration.*

- Sommes $\sum_{k=1}^{n} k^2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ ou $\sum_{k=0}^{n} q^k$ $(n \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{C} \setminus \{1\})$ à démontrer par récurrence.
- (exercice) Calculer $\sum_{k=0}^{n} e^{ki\theta}$ $(n \in \mathbb{N},\ \theta \in \mathbb{R})$, en déduire $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ ou $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.
- (exercice) Formule $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k$ $(n \in \mathbb{N}^*,\ (a,b) \in \mathbb{C}^2)$ par téléscopage.
- (exercice) Somme des termes successifs d'une suite arithmétique, entre deux indices quelconques $n_0 \leqslant n_1$, méthode « à la Gauss ».
- Formule de Pascal sur les coefficients binomiaux.
- Formule du binôme de Newton.
- (exercice) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ki\theta}$ $(n \in \mathbb{N},\ \theta \in \mathbb{R})$, puis $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ ou $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.