Programme de colle 9
25 au 29 novembre 2024

Notions

↳ *En un coup d'œil, les notions qui ont été vues en cours et sur lesquelles portent les colles de la semaine.*

Chapitre 7 : Sommes et produits

- Coefficients binomiaux. La formule du binôme de Newton.
- Programmes Python de calculs de sommes et de produits.

Chapitre 8 : Applications

- Notions générales, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image, antécédent, graphe, fonctions, domaine de définition. Image directe, image réciproque. Restriction. Application identité. Application caracactéristique d'une partie.
- Opération de composition, non-commutativité, élément neutre, associativité.
- Applications injectives, surjectives, bijectives. Inverse pour la composition, composition de bijections.
- Cas des fonctions réelles, rappel sur le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection.

Savoir-faire

↳ *Description des compétences attendues et des types d'exercices possibles.*

- Calculer des sommes, produits, sommes doubles, avec tout l'éventail de méthodes vues (sommes classiques, téléscopage, changement d'indice, séparation des termes).
- Utiliser la formule du binôme de Newton, calculer avec les coefficients binomiaux.
- Écrire un programme Python de calcul de somme ou de produit.
- Composer des applications.
- Étudier une image directe ou une image réciproque.
- Étudier l'injectivité ou la surjectivité d'une application. Donner l'image, donner la bijection réciproque. Les exemples se ramènent avant tout à de l'étude de fonctions ou à des systèmes linéaires. *Mais ces méthodes seront approfondies dans les chapitres à venir.*
- Utiliser le théorème de la bijection pour étudier des applications.

Questions de cours

↳ *Les questions à travailler et à savoir refaire, incluant l'énoncé précis et la démonstration.*

- (exercice) Somme des termes successifs d'une suite arithmétique, entre deux indices quelconques $n_0 \leqslant n_1$, méthode « à la Gauss ».
- Formule de Pascal sur les coefficients binomiaux.
- Formule du binôme de Newton.
- (exercice) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ki\theta}$ ($n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$), puis $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ ou $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.
- (exercice) Démontrer $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ (pour $1 \leqslant k \leqslant n$), application au calcul de $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.
- La composition d'applications est associative.
- Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone alors f est injective ; et (admettant que $J = f(I)$ est un intervalle) $f^{-1} : J \to I$ a même monotonie que f.