Programme de colle 10
2 au 6 décembre 2024

Notions

↳ *En un coup d'œil, les notions qui ont été vues en cours et sur lesquelles portent les colles de la semaine.*

Chapitre 8 : Applications

- Notions générales, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image, antécédent, graphe, fonctions, domaine de définition. Image directe, image réciproque. Restriction. Application identité. Application caracactéristique d'une partie.
- Opération de composition, non-commutativité, élément neutre, associativité.
- Applications injectives, surjectives, bijectives. Inverse pour la composition, composition de bijections.
- Cas des fonctions réelles, rappel sur le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection.

Chapitre 9 : Étude de fonctions

- Opérations sur les fonctions, domaine de définition.
- Notions générales d'étude de fonctions : croissance, majoration, extrema, dérivée et sens de variation, parité, périodicité.
- Représentation graphique, lien avec les opérations sur les fonctions, symétries du graphe, tangentes, asymptotes.
- Fonctions usuelles : puissances $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ puis $n \in \mathbb{Z}$, racines, exponentielle, logarithme, puissances réelles a^b, puissances $x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, exponentielle de base quelconque $x \mapsto a^x$ $(a \in]0, +\infty[)$, fonctions trigonométriques et leur réciproque, partie entière.

Savoir-faire

↳ *Description des compétences attendues et des types d'exercices possibles.*

- Composer des applications.
- Étudier une image directe ou une image réciproque.
- Étudier l'injectivité ou la surjectivité d'une application. Donner l'image, donner la bijection réciproque. *L'utilisation d'étude de fonctions fait directement le lien avec le chapitre suivant ; d'autres exemples se ramènent à des système linéaires.*
- Donner le domaine de définition d'une fonction.
- Étudier une fonction, tracer un tableau de variations, calculer des dérivées et des limites. *Essentiellement révisions lycée.*
- Démontrer des inégalités avec une étude de fonction.
- Étudier la parité, étudier la périodicité.
- Connaitre les fonctions usuelles, tracer leur graphe.

Questions de cours

↳ *Les questions à travailler et à savoir refaire, incluant l'énoncé précis et la démonstration.*

- (exercice) Démontrer $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ (pour $1 \leqslant k \leqslant n$), application au calcul de $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.
- La composition d'applications est associative.
- Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone alors f est injective ; et (admettant que $J = f(I)$ est un intervalle) $f^{-1} : J \to I$ a même monotonie que f.
- (exercice) Montrer que $\mathrm{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$ est une bijection (avec un tableau de variations) et donner l'expression de la bijection réciproque.
- (exercice) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.
- Si $f : I \to J$ est bijective et impaire, alors $f^{-1} : J \to I$ est impaire.

- Définition de a^b (a, b réels), et propriétés usuelles $a^b \times a^c = a^{b+c}$, $\left(a^b\right)^c = a^{b\times c}$, $(a_1 \times a_2)^b = a_1^b \times a_2^b$.