

Programme de colle 11

11 au 15 décembre 2023

Notions

Chapitre 8 : Applications

- Composition d'applications.
- Injectivité, surjectivité, bijectivité. Composition de bijections.
- Le cas des fonctions réelles. Injectivité et monotonie, théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection.

Chapitre 9 : Dénombrement

- Notion d'ensemble fini, applications injectives ou surjectives ou bijectives entre ensembles finis.
- Cardinaux des constructions usuelles : union, produit cartésien, listes (avec répétition) d'éléments de E .
- Listes sans répétition, permutations, anagrammes.
- Parties de E à k éléments et toutes les parties de E , interprétation combinatoire des formules sur les coefficients binomiaux.

Chapitre 10 : Fonctions usuelles

- Notions générales d'étude des fonctions. Opérations sur les fonctions, croissance, majorations, extrema, parité, périodicité.
- Représentation graphique de diverses opérations sur les fonctions et de l'application réciproque, tangentes, asymptotes.
- Étude des fonctions usuelles : puissances, exponentielle, logarithme.

Savoir-faire

- Composer des applications.
- Étudier l'injectivité et la surjectivité d'une application, dans des situations très variées, et notamment avec des fonctions réelles.
- Donner la bijection réciproque, connaître les propriétés générales des compositions de bijections.
- Dénombrer à l'aide des constructions habituelles sur les ensembles.
- Étudier une fonction réelle, le domaine de définition, la parité, la périodicité, la croissance par des opérations élémentaires.

Questions de cours

- $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement si il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$.
- Si f, g sont bijective alors $g \circ f$ est encore bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$
- Si les A_1, \dots, A_n sont deux à deux disjoints alors $\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i)$.
- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$
- Cardinal de l'ensemble des parties de E via une bijection $\mathbb{1} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^E$.
- Si f est une fonction réelle bijective et strictement croissante alors f^{-1} est strictement croissante ; idem pour strictement décroissant.
- Si f est impaire et bijective alors f^{-1} est impaire.
- Sens de variation de $g \circ f$ en fonction du sens de variation de g et de f .
- (exercice) sh : $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$, ou bien ch : $\begin{cases}]0, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[\\ x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$ est bijective, et expression de la bijection réciproque.