Programme de colle 11
9 au 13 décembre 2024

Notions

↳ *En un coup d'œil, les notions qui ont été vues en cours et sur lesquelles portent les colles de la semaine.*

Chapitre 9 : Étude de fonctions

- Opérations sur les fonctions, domaine de définition.
- Notions générales d'étude de fonctions : croissance, majoration, extrema, dérivée et sens de variation, parité, périodicité.
- Représentation graphique, lien avec les opérations sur les fonctions, symétries du graphe, tangentes, asymptotes.
- Fonctions usuelles : puissances $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ puis $n \in \mathbb{Z}$, racines, exponentielle, logarithme, puissances réelles a^b, puissances $x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, exponentielle de base quelconque $x \mapsto a^x$ $(a \in]0, +\infty[)$, fonctions trigonométriques et leur réciproque, partie entière.

Chapitre 10 : Systèmes linéaires

- Notion de système linéaire, matrice des coefficients, second membre, homogénéité, compatibilité.
- L'algorithme du pivot de Gauss, les trois opérations élémentaires, notion de système échelonné. Inconnues principales et inconnues libres, équations principales et conditions de compatibilité, rang. Systèmes de Cramer, systèmes de rang maximal.

Savoir-faire

↳ *Description des compétences attendues et des types d'exercices possibles.*

- Reprise du chapitre applications dans les situations qui se ramènent à des systèmes linéaires.
- Donner le domaine de définition d'une fonction.
- Étudier une fonction, tracer un tableau de variations, calculer des dérivées et des limites. *Essentiellement révisions lycée.*
- Démontrer des inégalités avec une étude de fonction.
- Étudier la parité, étudier la périodicité.
- Connaitre les fonctions usuelles, tracer leur graphe.
- Échelonner et résoudre un système linéaire. Utiliser les opérations élémentaires. Donner le rang, les conditions de compatibilité, les inconnues libres.
- Étudier des systèmes linéaires avec des paramètres.

Questions de cours

↳ *Les questions à travailler et à savoir refaire, incluant l'énoncé précis et la démonstration.*

- (exercice) Montrer que sh : $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$ est une bijection (avec un tableau de variations) et donner l'expression de la bijection réciproque.
- (exercice) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.
- Si $f : I \to J$ est bijective et impaire, alors $f^{-1} : J \to I$ est impaire.
- Définition de a^b (a, b réels), et propriétés usuelles $a^b \times a^c = a^{b+c}$, $\left(a^b\right)^c = a^{b \times c}$, $(a_1 \times a_2)^b = a_1^b \times a_2^b$.
- (exercice) Soit E l'ensemble des polynômes de degré au plus 2, soit l'application $\varphi : \begin{cases} E \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(1), P(2), P(3)) \end{cases}$. Montrer avec un système linéaire que φ est bijective puis donner l'application réciproque.
- (exercice) Idem avec $\psi : \begin{cases} E \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(1), P'(2), P(3)) \end{cases}$. Montrer avec un système linéaire que ψ n'est ni injective ni surjective.
- (exercice) Donner toutes les solutions de $\mathcal{S}_\lambda : \begin{cases} 4x + 6y = \lambda x \\ -x - y = \lambda y \end{cases}$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.