Programme de colle 25
29 avril au 3 mai 2024

Notions

Chapitre 19 : Espaces vectoriels

- Espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$.
- Notion de sous-espace vectoriel. Trois caractérisations équivalentes, intersection, hyperplan, sous-espace engendré.
- Famille de vecteurs : libres, liés, base.
- Dimension d'un sous-espace vectoriel. Inégalités sur la dimension. Rang d'une famille de vecteurs, calcul dans une base.

Chapitre 20 : Limites de fonctions

- Définition de limite dans tous les cas, limite à droite et à gauche, unicité de la limite.
- Opérations sur les limites, caractérisation séquentielle, composition de limite.
- Théorèmes généraux : limites et passages des inégalités, théorème des gendarmes, théorème de la limite monotone.
- Comparaisons et équivalents usuels.

Savoir-faire

- Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$ est ou n'est pas un sous-espace vectoriel.
- Montrer qu'une famille de vecteurs est, ou n'est pas, une famille libre, ou une famille génératrice, ou une base.
- Convertir un sous-espace vectoriel donné par des équations en un sous-espace paramétré, et réciproquement.
- Donner une base d'un sous-espace vectoriel présenté par des équations ou par un paramétrage (extraire une base).
- Raisonner avec une famille de vecteurs écrite dans une base, donner le rang.
- Raisonner avec la dimension.
- Calculer des limites de fonctions, en appliquant les opérations usuels et les théorèmes généraux.
- Manipuler les équivalents, calculer des limites avec les équivalents usuels.

Questions de cours

- Une famille de vecteurs est libre si et seulement si toute combinaison linéaire de la famille a des coefficients uniques.
- Si pour deux sous-espaces vectoriels $F \subset G$ alors $\dim(F) \leqslant \dim(G)$, et égalité des dimensions si et seulement si $F = G$.
- (exercice) Un hyperplan $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\}$ (où $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus (0, ..., 0)$) est de dimension $n-1$.
- Une fonction f a une limite en a si et seulement si f a des limites à gauche et à droite en a, et ces limites sont égales.
- Caractérisation séquentielle de la limite : $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ alors $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$.
- Théorème de la limite monotone.