

# Programme de colle 31\*

## 1 juillet au 31 août 2025

### Notions

---

↳ *En un coup d'œil, les notions qui ont été vues en cours et sur lesquelles portent les colles de la semaine.*

#### Chapitre 27 : Intégration

- Subdivision régulière d'un intervalle, somme de Riemann, méthode des rectangles à gauche et à droite.
- Démonstration des propriétés connues de l'intégrale via les sommes de Riemann : linéarité, positivité, inégalité triangulaire, valeur moyenne d'une fonction, relation de Chasles, positivité stricte.
- Le théorème fondamental du calcul intégral, rappels sur les méthodes de calcul, étude de  $x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$ .

#### Chapitre 28 : Fonctions à plusieurs variables

- Notions générales sur les fonctions à plusieurs variables, domaine de définition, fonctions partielles.
- Notions sur les parties du plan, pavés ouvert et fermés.
- Représentations graphiques, graphe, courbes de niveaux, étude d'exemples (*tracés à l'ordinateur avec le logiciel SageMath et projetés en classe*).
- Continuité pour une fonction à plusieurs variables, opérations sur les fonctions continues.
- Dérivées partielles, fonctions  $\mathcal{C}^1$ , dérivée et extrema locaux, points critiques, points selles.
- Développement limité à l'ordre 1, plan tangent, vecteur gradient, champs de vecteurs gradients, étude d'exemples.
- Dérivées partielles secondes, fonctions  $\mathcal{C}^2$ , théorème de Scharzw.
- Application aux statistiques à deux variables et à la droite de régression affine.

### Savoir-faire

---

↳ *Description des compétences attendues et des types d'exercices possibles.*

- Calculer des sommes en faisant apparaître une somme de Riemann.
- Étudier une fonction  $x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$ , où  $a$  et  $b$  sont des fonctions.
- Étudier une fonction à plusieurs variables : donner le domaine de définition, étudier la continuité, étudier quelques fonctions partielles, tracer quelques courbes de niveaux.
- Calculer des dérivées partielles, déterminer les points critiques et étudier les extrema locaux, utiliser un développement limité à l'ordre 1.
- Calculer le vecteur gradient, représenter un champ de vecteurs gradients, raisonner avec le gradient et les courbes de niveaux.
- Étudier la droite de régression affine d'une série statistiques à deux variables via une fonction à deux variables.

### Questions de cours

---

↳ *Les questions à travailler et à savoir refaire, incluant l'énoncé précis et la démonstration.*

- Positivité stricte de l'intégrale.
- Le théorème fondamental du calcul intégral.
- (exercice)  $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$  a toutes ses fonctions partielles continues sur  $\mathbb{R}$ , mais n'est pas continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Si  $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$  admet un minimum local en  $(a, b)$  sur un pavé ouvert, alors  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ .
- Établir le développement limité à l'ordre 1 pour une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur un pavé ouvert.
- Dérivée de  $t \mapsto f(u(t), v(t))$  via un développement limité à l'ordre 1.
- Caractériser la droite de régression affine  $Y = aX + b$  d'une série statistique à deux variables  $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$  via l'étude des points critiques de la fonction  $(a, b) \mapsto \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i + b))^2$ .