Méthode des rectangles au milieu
Correction

Partie A : étude sur un seul intervalle

1. On prend $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $f : x \mapsto px+q$ (attention à ne pas poser tout de suite $f : x \mapsto ax+b$: ce ne sont pas les mêmes a et b). Il s'agit de calculer les deux membres ci-dessus et de montrer qu'ils sont égaux. Mais d'une part

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b px\,\mathrm{d}x + \int_a^b q\,\mathrm{d}x && (1)\\ &= \left[p\frac{x^2}{2}\right]_a^b + q(b-a) && (2)\\ &= \boxed{\frac{p}{2}(b^2-a^2)+q(b-a)} && (3)\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}(b-a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= (b-a)\times\left(p\frac{a+b}{2}+q\right) && (4)\\ &= \boxed{p\frac{(b-a)}{2}\times(a+b)+(b-a)\times q} && (5)\end{aligned}$$

mais dans cette dernière ligne $(b-a)(a+b) = b^2-a^2$ et on voit bien que les deux expressions sont égales. Donc $\boxed{\text{la formule est exacte}}$.

2. Partant du terme de droite, par linéarité :

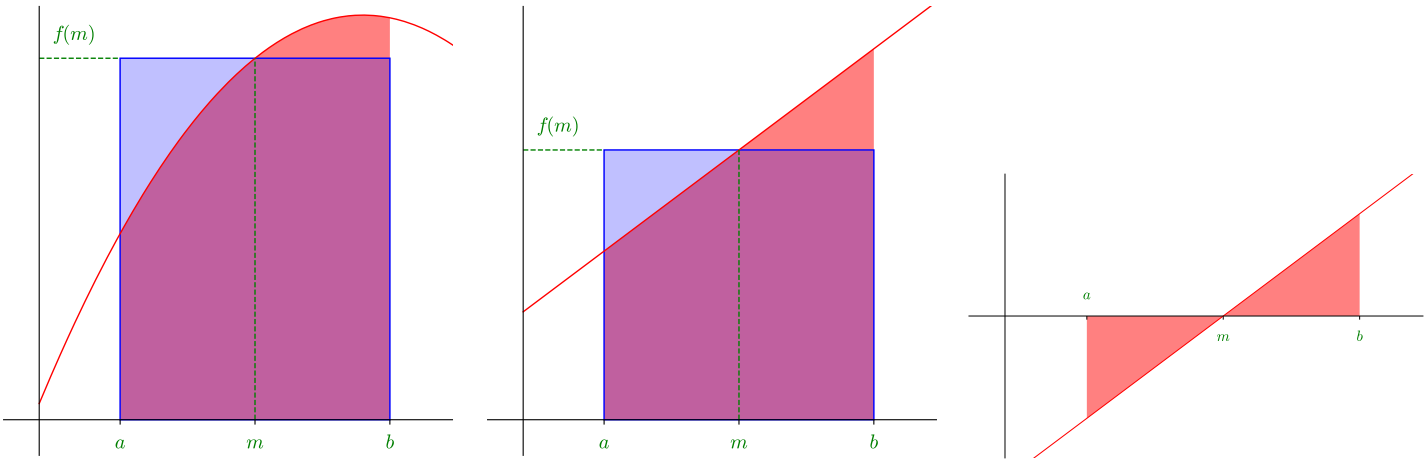
$$\int_a^b \Big(f(x)-f(m)-(x-m)f'(m)\Big)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{A} - \underbrace{\int_a^b f(m)\,\mathrm{d}x}_{B} - \underbrace{\int_a^b (x-m)f'(m)\,\mathrm{d}x}_{C} \qquad (6)$$

Or A est bien un bout du terme voulu et B (où $f(m)$ est une constante) est $(b-a)\times f(m)$ avec $m = \frac{a+b}{2}$. Il s'agit donc en fait de montrer que le terme $C = 0$ (on peut même dire : **si** la formule à démontrer est vraie, **alors nécessairement** $C = 0$, il faut donc s'acharner sur son brouillon pour démontrer cela). Or

$$\begin{aligned}C &= f'(m)\times\int_a^b (x-m)\,\mathrm{d}x && (7)\\ &= f'(m)\times\left[\frac{(x-m)^2}{2}\right]_a^b && (8)\\ &= \frac{f'(m)}{2}\times\left((b-m)^2-(a-m)^2\right) && (9)\end{aligned}$$

Mais m est le milieu ce qui signifie $b-m = b-\frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}$ et de même $a-m = a-\frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} = -\frac{b-a}{2}$. Donc les deux termes sont égaux : $(b-m)^2 = (a-m)^2$ et ainsi $\boxed{C=0}$. Ceci démontre l'égalité voulue.

Remarque 1. L'interprétation graphique est la suivante.
À gauche : le cas général, une fonction continue sur $[a,b]$ et le rectangle pris au point milieu m.
Au milieu : le cas d'une fonction affine. L'aire du trapèze délimité sous la courbe (rouge) est exactement égale à l'aire du rectangle passant par le milieu (bleu), car les aires des triangles dépassant de part et d'autre du milieu se compensent exactement !
À droite : le cas d'une fonction affine passant par le milieu (comme $x \mapsto (x-m)f'(m)$). L'aire sous la courbe (en rouge) est nulle car les aires des deux triangles se compensent exactement.
C'est précisément à cause de ces intuitions que la méthode des rectangles au milieu (et exactement au milieu, pas ailleurs) va se révéler plus efficace que la méthode des rectangles à gauche ou à droite.



3. f est $\mathcal{C}^2$ donc f'' est continue, sur l'intervalle $[a,b]$ qui est fermé, borné, non vide. Donc par le $\boxed{\text{théorème des bornes}}$, f'' est bien bornée.

4. (a) Dans l'expression de g apparaissent des constantes (ce qui dépend seulement de x, qui ne bouge pas, car on dérive par rapport à t) et $f(t)$, $f'(t)$. Mais f est $\mathcal{C}^2$ donc en particulier f' est encore dérivable. Ainsi $\boxed{g \text{ est bien dérivable}}$. On calcule alors

$$\forall t \in [a,b], \quad g'(t) = -f'(t) - \Big(-f'(t) + (x-t)f''(t)\Big) + 2A(x-t) \tag{10}$$
$$= \boxed{-(x-t)f''(t) + 2A(x-t) = g'(t)} \tag{11}$$

(b) D'abord $\boxed{g(x) = 0}$ est automatique. L'équation $g(m) = 0$ est équivalente à

$$0 = f(x) - f(m) - (x-m)f'(m) - A(x-m)^2 \tag{12}$$
$$\iff A(x-m)^2 = f(x) - f(m) - (x-m)f'(m) \tag{13}$$
$$\iff \boxed{A = \frac{f(x) - f(m) - (x-m)f'(m)}{(x-m)^2}} \tag{14}$$

et (on divise par $(x-m)^2 \neq 0$) cela donne bien une unique valeur de A.

(c) On applique alors le $\boxed{\text{théorème de Rolle}}$, avec cette valeur de A déterminée : la fonction g vérifie $g(m) = g(x) = 0$, est bien continue sur $[m,x]$ et est bien dérivable sur ce même intervalle (car dérivable sur tout $[a,b]$, encore une fois c'est parce que f est $\mathcal{C}^2$). Il existe donc un $\boxed{c_x \in]m,x[\text{ tel que } g'(c_x) = 0}$. Mais cela donne

$$0 = g'(c_x) \tag{15}$$
$$\iff 0 = -(x-c_x)f''(c_x) + 2A(x-c_x) \tag{16}$$
$$\iff f''(c_x) = 2A \tag{17}$$
$$\iff f''(c_x) = 2\frac{f(x) - f(m) - (x-m)f'(m)}{(x-m)^2} \tag{18}$$
$$\iff \boxed{f(x) - f(m) - (x-m)f'(m) = \frac{(x-m)^2}{2} f''(c_x)} \tag{19}$$

et donc c'est bien l'égalité voulue.

Enfin on a par définition $|f''(c_x)| \leqslant M$ (sur tout $[a,b]$), et $(x-m)^2 \geqslant 0$ donc

$$\boxed{\Big|f(x) - f(m) - (x-m)f'(m)\Big| \leqslant \left|\frac{(x-m)^2}{2} f''(c_x)\right| \leqslant \frac{(x-m)^2}{2} M} \tag{20}$$

(d) Attention à l'ordre logique des questions.
Pour $x = m$, on ne peut pas trouver la constante A ni appliquer le théorème de Rolle. Mais en remplaçant x par m l'inégalité ci-dessus est $|0| \leqslant 0$ qui est bien $\boxed{\text{vraie}}$.
Pour $x < m$, le même raisonnement que précédemment s'applique mais c_x est dans l'intervalle $]c_x, m[$. Cela ne change pas que $(x-m)^2 \geqslant 0$ et donc $\boxed{\text{le même calcul reste valable}}$.

5. En résumé on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \tag{21}$$
$$= \left|\int_a^b \Big(f(x) - f(m) - (x-m)f'(m)\Big)\,\mathrm{d}x\right| \qquad \text{(question 2)} \tag{22}$$
$$\leqslant \int_a^b \Big|f(x) - f(m) - (x-m)f'(m)\Big|\,\mathrm{d}x \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \tag{23}$$
$$\leqslant \int_a^b \frac{(x-m)^2}{2} M\,\mathrm{d}x \qquad \text{(majoration précédente)} \tag{24}$$

et il ne reste qu'à calculer le terme de droite. On y arrive, plus ou moins naïvement :

$$\int_a^b \frac{(x-m)^2}{2} M\,\mathrm{d}x \tag{25}$$
$$= \left[\frac{(x-m)^3}{6} M\right]_a^b \tag{26}$$
$$= \frac{M}{6}\Big((b-m)^3 - (a-m)^3\Big) \tag{27}$$
$$= \frac{M}{6}\left(\left(\frac{(b-a)}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b-a}{2}\right)^3\right) \tag{28}$$
$$= \frac{M}{6}\left(\frac{(b-a)^3}{8} + \frac{(b-a)^3}{8}\right) \tag{29}$$
$$= \frac{M}{6}\left(2\times\frac{(b-a)^3}{8}\right) \tag{30}$$
$$= \boxed{\frac{(b-a)^3}{24} M} \tag{31}$$

Remarque 2. L'intuition qui sous-tend ces calculs est la suivante. On intègre une parabole, sur un intervalle $[a, b]$, passant par le milieu, mais la parabole est symétrique par rapport à son milieu et donc les aires à gauche et à droite doivent bien s'additionner… En fait le changement de variable $u = x - m$ permet de recentrer les choses et donne

$$\int_a^b \frac{(x-m)^2}{2}\,\mathrm{d}x = \int_{-h}^h \frac{u^2}{2}\,\mathrm{d}u \tag{32}$$

où $h = \frac{b-a}{2}$ (et ainsi 0 devient bien le milieu de $[-h, h]$). Mais on peut encore avoir l'intuition, par symétrie de la parabole, que

$$\int_{-h}^h \frac{u^2}{2}\,\mathrm{d}u = 2\times\int_0^h \frac{u^2}{2}\,\mathrm{d}u \tag{33}$$

et cela se démontre en effet en appliquant la relation de Chasles

$$\int_{-h}^h \frac{u^2}{2}\,\mathrm{d}u = \int_{-h}^0 \frac{u^2}{2}\,\mathrm{d}u + \int_0^h \frac{u^2}{2}\,\mathrm{d}u \tag{34}$$

et en effectuant le changement de variable $v = -u$ dans l'une de ces deux intégrales, qui montre qu'elles sont égales ! Cet argument est vrai pour toutes les fonctions paires.

Bref, avec un peu d'habitude, on calcule en fait $2 \times \displaystyle\int_0^{(b-a)/2} \frac{u^2}{2}\,\mathrm{d}u$ et il est moins difficile de se tromper et de trouver $\left[\dfrac{u^3}{3}\right]_0^{(b-a)/2} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{(b-a)^3}{2^3}$

Partie B : subdivisons

6. D'une part $x_{k+1} - x_k$ est égal, comme d'habitude, à $\frac{b-a}{n}$. Qui est constant et peut aussi bien rentrer ou sortir de la somme. Ainsi :

$$\frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\tfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) \times f\left(\tfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)}_{A} \tag{35}$$

Mais d'autre part par la $\boxed{\text{relation de Chasles}}$(comme d'habitude pour la subdivision

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x}_{B} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{36}$$

Ainsi il suffit d'écrire $B - A$ et de faire rentrer sous une même somme :

$$B - A = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) \times f\left(\tfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right) \tag{37}$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - (x_{k+1}-x_k) \times f\left(\tfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right)} \tag{38}$$

et c'est le résultat voulu.

7. Le membre de gauche est exactement celui de la partie précédente où on remplace a par x_k et b par x_{k+1}. Sur cet intervalle f est toujours $\mathcal{C}^2$ est $|f''|$ est toujours majorée par M (puisque M est un majorant sur $[a,b]$ tout entier). Cette fois-ci la longueur de l'intervalle est $x_{k+1} - x_k$ (qui va jouer le rôle de $b-a$) qui est égal à $\frac{b-a}{n}$ et donc on trouve

$$\boxed{\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - (x_{k+1}-x_k) \times f\left(\tfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{24}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 M} \tag{39}$$

et le terme de majoration est bien égal à $\frac{(b-a)^3}{24n^3}M$.

8. Bien que les calculs et les manipulations puissent faire peur, il suffit de résumer ce qui a été fait avant, tout étant déjà mis sous la bonne forme (il est nettement plus difficile de *faire apparaitre* les inégalités triangulaires quand les calculs n'ont pas été ainsi préparés). Alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\tfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right| \tag{40}$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - (x_{k+1}-x_k) \times f\left(\tfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right)\right| \qquad \text{(question 6)} \tag{41}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - (x_{k+1}-x_k) \times f\left(\tfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right| \qquad \text{(inégalité triangulaire pour } \textstyle\sum\text{)} \tag{42}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^3}{24n^3}M \qquad \text{(question précédente)} \tag{43}$$

$$= n \times \frac{(b-a)^3}{24n^3}M \qquad \text{(somme de } n \text{ termes égaux)} \tag{44}$$

$$= \boxed{\frac{(b-a)^3}{24n^2}M} \tag{45}$$

Remarque 3. La méthode est intéressante ; cette partie B fonctionne essentiellement de la même manière pour toutes les autres méthodes d'intégration vues. La différence est que la méthode des rectangles à gauche ou à droite n'est même pas exacte pour une fonction affine (en fait seulement pour une fonction constante) et les calculs de la partie 1 sont plus faciles. Pour les trapèzes les idées sont très similaires. Pour la méthode de Simpson, elle est exacte sur les polynômes de degré 2 et en fait même 3 et il faut plus de travail pour obtenir une majoration sur $[a, b]$ en $(b-a)^5$, d'où on déduit une majoration sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ en $\frac{(b-a)^5}{n^5}$ et à la fin une majoration sur $[a, b]$ en $\frac{(b-a)^5}{n^4}$.
Concrètement, une majoration en $\frac{1}{n}$ signifie qu'en multipliant n (le nombre de rectangles) par 10 on réduit l'écart d'environ 1/10 soit un gain d'une décimale sur le résultat, alors qu'avec une majoration en $\frac{1}{n^2}$ on réduira l'écart d'un facteur 1/100 et donc on gagne deux décimales…

Partie C : calculs sur un exemple

9. On rappelle une n-ième fois qu'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est $x \mapsto \arctan(x)$, qui est la fonction réciproque de tan, qui est impaire comme elle, avec $\tan(\pi/4) = 1$ donc $\arctan(1) = \pi/4$. Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \Big[2\arctan(x)\Big]_{-1}^{1} \\ &= 2\arctan(1) - 2\arctan(-1) \\ &= 2 \times \frac{\pi}{4} - 2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \boxed{\pi = I} \end{aligned}$$

Remarque 4. Similairement à la remarque 2, on intègre une fonction **paire** sur un intervalle symétrique autour de 0. Le résultat est donc le double de l'intégrale de 0 à 1. La fonction sous l'intégrale est d'ailleurs strictement positive, donc dans le calcul avec les primitives le résultat ne peut pas se compenser et s'annuler, au contraire.

10. Sans commentaire.

```python
def f(x):
    return 2 / (1 + x**2)
```

11. On rappelle juste que $\frac{x_k+x_{k+1}}{2} = a + (2k+1) \times \frac{b-a}{2n}$ soit ici $-1 + \frac{(2k+1)}{n}$. Il s'agit donc de calculer une somme (sur n rectangles, $n+1$ points de subdivision, k de 0 à $n-1$ c'est à dire en Python `range(n)`… Pas de piège, tout est dans le bon sens !) et multiplier par $\frac{b-a}{n}$ soit ici $\frac{2}{n}$.

```python
def integrale(n):
    S = 0
    for k in range(n):
        S = S + f(-1 + (2*k+1) / n)
    return 2 * S / n
```

12. (a) Avec la règle usuelle de dérivée d'un inverse, on calcule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}} \tag{46}$$

Pour calculer alors f'', on dérive comme un quotient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -\frac{4 \times (1+x^2)^2 - (4x) \times 2 \times 2x \times (1+x^2)}{(1+x^2)^4} \tag{47}$$

$$= -\frac{4(1+x^2) - 16x^2}{(1+x^2)^3} \tag{48}$$

$$= \boxed{\frac{12x^2 - 4}{(1+x^2)^3} = f''(x)} \tag{49}$$

(b) D'abord $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x^2>0$ et ce terme est évidemment $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par quotient (opérations usuelles), $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$.
Dans les calculs précédents, on voit que $P_0 : x \mapsto 2$, $P_1 : x \mapsto -4x$ et $P_2 : x \mapsto 12x^2-4$.
Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ ».

- $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée en prenant $\boxed{P_0 = 2}$ car $f^{(0)} = f$ (par définition).
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Alors pour calculer $f^{(n+1)}$ on doit dériver le quotient $f^{(n)} = \frac{u}{v}$ où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = P_n(x) \qquad u'(x) = P_n'(x) \tag{50}$$
$$v(x) = (1+x^2)^{n+1} \qquad v'(x) = (n+1) \times 2x \times (1+x^2)^n \tag{51}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} && (52)\\
&= \frac{P_n'(x)(1+x^2)^{n+1} - P_n(x) \times (n+1) \times 2x \times (1+x^2)^n}{\Big((1+x^2)^{n+1}\Big)^2} && (53)\\
&= \frac{P_n'(x)}{(1+x^2)^{n+1}} - \frac{P_n(x) \times (n+1) \times 2x}{(1+x^2)^{n+2}} && (54)\\
&= \frac{P_n'(x) \times (1+x^2)}{(1+x^2)^{n+2}} - \frac{P_n(x) \times (n+1) \times 2x}{(1+x^2)^{n+2}} && (55)\\
&= \frac{P_n'(x) \times (1+x^2) - P_n(x) \times (n+1) \times 2x}{(1+x^2)^{n+2}} && (56)
\end{aligned}$$

On pose donc

$$\boxed{P_{n+1} : x \mapsto P_n'(x) \times (1+x^2) - P_n(x) \times (n+1) \times 2x} \tag{57}$$

et c'est bien un polynôme car P_n est un polynôme, donc P_n' aussi et les produits par $2x$ et par $1+x^2$ sont aussi des polynômes. On a alors bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}}$ et ceci est bien $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui conclut.

(c) On sait déjà par les questions précédentes $\boxed{P_1 : x \mapsto -4x}$ et $P_2 : x \mapsto 12x^2-4$ soit $\boxed{P_2 : x \mapsto 4(3x^2-1)}$ (qu'on retrouverait aussi en appliquant notre relation de récurrence).
La relation de récurrence précédente permet alors de calculer P_3 :

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= 24x \times (1+x^2) - 4(3x^2-1) \times 3 \times 2x && (58)\\
&= 24 \times \Big(x(1+x^2) - x(3x^2-1)\Big) && (59)\\
&= 24 \times x \times \Big((1+x^2) - (3x^2-1)\Big) && (60)\\
&= 24x \times (2-2x^2) && (61)\\
&= 48x(1-x^2) && (62)\\
&= \boxed{48x(1-x)(1+x) = P_3(x)} && (63)
\end{aligned}$$

(d) Question un petit peu difficile (mais on n'en a pas besoin pour la suite)…
On veut bien sûr montrer le résultat par récurrence, et il est clairement vrai si $n=0$ et si $n=1$. Alors dans la formule donnant P_{n+1} en fonction de P_n, si P_n est de degré n alors $(n+1) \times P_n(x) \times 2x$ sera de degré $n+1$, $P_n'(x)$ sera de degré $n-1$ et donc $P_n'(x) \times (1+x^2)$ sera de degré $(n-1)+2 = n+1$. Mais on ne pourra alors pas conclure sur le degré de leur différence ! Une récurrence naïve montre donc que $\boxed{P_n \text{ est de degré } \textbf{au plus } n}$.

Cependant on peut voir que les coefficients dominants ne peuvent pas s'annuler. Rédigeons-le : montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « P_n est de degré n » et donnons en même temps une relation de récurrence vérifiée par son coefficient dominant.

- $n = 0$: on a $P_0 = 2$ qui est bien de degré 0, on note $a_0 = 2$ son coefficient dominant.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Notons a_n le coefficient dominant de P_n, avec $a_n \neq 0$. Alors comme on l'a dit, dans la formule $P_n'(x) \times (1+x^2) - P_n(x) \times (n+1) \times 2x$, le terme $P_n'(x) \times (1+x^2)$ sera de degré $n+1$ et de son coefficient dominant sera $n \times a_n$ (car c'est le produit entre le coefficient dominant de P_n', et de celui de $1+x^2$ qui est 1), et le terme $P_n(x) \times (n+1) \times 2x$ sera de degré $n+1$ et de coefficient dominant $a_n \times (n+1) \times 2$. Ainsi P_{n+1} sera bien de degré $n+1$ **si** le coefficient devant x^{n+1} ne s'annule pas dans cette différence, ce qu'on visualise ainsi :

$$P_{n+1}(x) = \underbrace{P_n'(x) \times (1+x^2)}_{na_n x^{n+1} + \dots} - \underbrace{P_n(x) \times (n+1) \times 2x}_{2(n+1)a_n x^{n+1} + \dots}$$

Mais il suffit de calculer le coefficient devant x^{n+1} dans cette différence qui est

$$na_n - 2(n+1)a_n = -(n+2)a_n \tag{64}$$

Ceci ne peut donc pas s'annuler si $a_n \neq 0$ ($n \geqslant 0$, $n+2 > 0$), et donc $\boxed{P_{n+1} \text{ est bien de degré } n+1}$ et son coefficient dominant est $\boxed{a_{n+1} = -(n+2)a_n}$.

Remarque 5. On en déduit alors

$$\begin{aligned} a_n &= (-(n+1)) \times (-n) \times \cdots \times (-2) \times a_0 && (65)\\ &= (-1)^n \times (n+1)! \times 2 && (66) \end{aligned}$$

On pourrait démontrer cela dans la même récurrence précédente. On fait bien remarquer que dans une telle construction de polynômes par récurrence, il est **toujours intéressant** de regarder en même temps le degré et le coefficient dominant.

(e) On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 4 \times \dfrac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$ et pour tracer son tableau de variations il faut le signe de sa dérivée c'est à dire le signe de $f^{(3)}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f^{(3)}(x) = 48 \times \dfrac{x(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^4}}$. Si ces calculs sont corrects alors rien n'est ensuite difficile, les termes $1+x^2$ et ses puissances étant toujours strictement positifs.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$-$	
$f^{(3)}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f''(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(67)

De plus on calcule aisément les valeurs remarquables (attention à leur signe) et les limites. En fait, il est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $\lim_{n\to+\infty} f^{(n)}(x) = \lim_{n\to-\infty} f^{(n)}(x) = 0$ car $f^{(n)}$ est un quotient d'un polynôme P_n de degré n, par un polynôme $(1+x^2)^{n+1}$ de degré $2n+2 > n$.

(f) Facile mais il faut faire un tout petit peu attention aux signes ! Le tableau de variations montre bien que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \boxed{-4 \leqslant f''(x) \leqslant 1} \tag{68}$$

et donc en valeur absolue le maximum est $+4$, atteint en 0.

13. (a) Classique aussi, il faut savoir faire, avec une boucle **while** telle que **quand la boucle se termine** alors la condition $< \varepsilon$ est vérifiée, donc la boucle continue **tant que le terme est** $\geqslant \varepsilon$:

```python
def seuil(epsilon, a, b, M):
    n = 1 # on ne peut pas mettre 0 car on divise par n
    while (b-a)**3 * M / (24 * n**2) >= epsilon:
        n = n + 1
    return n
```

(b) Dès que $\frac{(b-a)^3}{24n^2}M < \varepsilon$ alors l'écart entre l'approximation avec n rectangles et I est garanti exact avec un écart strictement inférieur à ε, c'était le but de la partie 2. Ici $a = -1$, $b = 1$, et on peut prendre pour M le maximum de $|f''|$ c'est à dire $M = 4$ (obtenir ce majorant n'était pas si facile, mais nécessaire). Le terme $\frac{(b-a)^3}{24n^2}M$ est donc en fait égal à $\frac{2^3}{24n^2} \times 4 = \frac{4}{3n^2}$ (mais on n'a pas besoin de ce calcul car on a la fonction précédente). On conclut donc sans commentaire aucun.

```python
def nombre_préféré_lefèvre(epsilon):
    n = seuil(epsilon, -1, 1, 4)
    return integrale(n)
```

Remarque 6. On peut d'ailleurs tester la fonction :

```python
>>> nombre_préféré_lefèvre(1e-6)
3.141593651342856
```

Approximation de π exacte avec à 10^{-6} près (c'est à dire en fait 5 décimales garanties exactes, les 14159 — la 6e pourrait être 2 ou 3 ou 4). Ici le seuil est $n = 578$.