Correction
TD 1
Logique

Exercice 6. *Pour deux ensembles A, B, on définit leur différence symétrique $A\Delta B$ par :*

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \tag{7}$$

1. *Représenter $A\Delta B$ par un dessin.*
2. *L'opération Δ est-elle commutative ? Associative ?*
3. *Que sont $A\Delta A$ et $A\Delta\emptyset$?*
4. *Montrer que l'intersection est distributive sur la différence symétrique.*
5. *Montrer que pour tous ensembles A, B, C :*

$$A\Delta B = A\Delta C \quad \Longleftrightarrow \quad B = C \tag{8}$$

Correction. 1. *Je ne sais pas faire des dessins sur l'ordinateur.*

2. Remarquer que $x \in A\Delta B \Leftrightarrow x \in A \text{ xor } x \in B$ (exercice 2). En effet

$$\begin{aligned} x \in A\Delta B &\Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) &(9)\\ &\Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ et non } \big(x \in (A \cap B)\big) &(10)\\ &\Longleftrightarrow \big(x \in A \text{ ou } x \in B\big) \text{ et non } \big(x \in A \text{ et } x \in B\big) &(11)\\ &\Longleftrightarrow x \in A \text{ xor } x \in B &(12)\end{aligned}$$

Cela implique facilement que Δ est à la fois commutative et associative :

(a) $B\Delta A = A\Delta B$ car

$$\begin{aligned} x \in B\Delta A &\Longleftrightarrow x \in B \text{ xor } x \in A &(13)\\ \text{(commutativité de xor)} &\Longleftrightarrow x \in A \text{ xor } x \in B &(14)\\ &\Longleftrightarrow x \in A\Delta B &(15)\end{aligned}$$

(b) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ car :

$$\begin{aligned} x \in (A\Delta B)\Delta C &\Longleftrightarrow (x \in A\Delta B) \text{ xor } x \in C &(16)\\ &\Longleftrightarrow \big(x \in A \text{ xor } x \in B\big) \text{ xor } x \in C &(17)\\ \text{(associativité de xor)} &\Longleftrightarrow x \in A \text{ xor } \big(x \in B \text{ xor } x \in C\big) &(18)\\ &\Longleftrightarrow x \in A \text{ xor } (x \in B\Delta C) &(19)\\ &\Longleftrightarrow x \in A\Delta(B\Delta C) &(20)\end{aligned}$$

3. (a) $A\Delta A = \emptyset$:

$$x \in A\Delta A \Longleftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin A \tag{21}$$

est toujours faux.

(b) $A\Delta\emptyset = A$:

$$x \in A\Delta\emptyset \Longleftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin \emptyset \tag{22}$$

et le morceau $x \notin \emptyset$ est toujours vrai, donc ceci est équivalent simplement à $x \in A$.

4. Il faut montrer que pour trois ensembles A, B, C :

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C) \tag{23}$$

Une possibilité est de démontrer, comme dans les questions précédents, que cela est équivalent à : pour tout élément x,

$$x \in A \text{ et } (x \in B \text{ xor } x \in C) \Longleftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ xor } (x \in A \text{ et } x \in C) \tag{24}$$

et donc que cela découle donc de la règle de calcul sur les assertions (comme pour la distributivité), qu'on peut démontrer par une table de vérité ou par des calculs : pour trois assertions P, Q, R

$$P \text{ et } (Q \text{ xor } R) \equiv (P \text{ et } Q) \text{ xor } (P \text{ et } R) \tag{25}$$

Mais sinon, on raisonne :

(a) Inclusion $\subset$:
$x \in A \cap (B\Delta C)$ signifie que sont vraies à la fois :
   i. $x \in A$,
   ii. $x \in B$ ou $x \in C$,
   iii. non$(x \in B$ et $x \in C)$,
   iv. (donc x est soit dans B soit dans C et pas les deux à la fois)

Alors :

— Soit $x \in B$, dans ce cas $x \notin C$. Alors $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in A \cap B$, et $x \notin C$ donc $x \notin (A \cap C)$. Ainsi $x \in (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.
— Soit $x \in C$, dans ce cas $x \notin B$. Et donc de même $x \in (A \cap C)$ et $x \notin (A \cap B)$, ainsi $x \in (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

Dans les deux cas $x \in (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

(b) Inclusion $\supset$:
$x \in (A \cap B)\Delta(A \cap C)$ signifie que sont vraies :

i. Soit $x \in A$ et $x \in B$,
ii. Soit $x \in A$ et $x \in C$,
iii. et pas les deux à la fois.

Alors :
— Dans le premier cas $x \in A$, de plus $x \in B$. Mais $x \notin C$, sinon ce serait aussi le deuxième cas. Donc $x \in A$ et $x \in B\Delta C$, donc $x \in A \cap (B\Delta C)$.
— Idem, dans le deuxième cas $x \in A$, et aussi $x \in C$, mais donc $x \notin B$. Et ainsi $x \in A \cap (B\Delta C)$.

Dans les deux cas $x \in A \cap (B\Delta C)$.

5. Si $B = C$ alors $A\Delta B = A\Delta C$: rien à dire. Montrons donc l'implication $\Longrightarrow$. Supposons $A\Delta B = A\Delta C$.
Le but est de montrer $B = C$, donc montrons d'abord l'inclusion $B \subset C$ (comme B et C jouent des rôles symétriques, l'inclusion dans l'autre sens sera vraie pour exactement les même raisons, en échangeant simplement les rôles de B et de C).
Soit donc un élément x de B et le but est de montrer que $x \in C$.

(a) Si $x \notin A$. Alors $x \in A\Delta B$. Donc on déduit $x \in A\Delta C$. Mais encore une fois comme $x \notin A$ c'est que $x \in C$.
(b) Si $x \in A$. Alors $x \notin A\Delta B$. Donc on déduit $x \notin A\Delta C$. Mais encore une fois comme $x \in A$ cela signifie $x \in C$.

Dans les deux cas on a montré que $x \in C$. Ceci prouve l'inclusion $B \subset C$.

□

Exercice 7. *Montrer que les ensembles suivants sont égaux :*

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 1\right\} \tag{9}$$
$$F = \left\{(5b - a, 1 + a + b, 1 + a - b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\} \tag{10}$$

Correction. 1. L'inclusion $F \subset E$ est la plus facile. Soit $(x, y, z) \in F$. Cela signifie qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = 5b - a$, $y = 1 + a + b$ et $z = 1 + a - b$. Pour montrer que $(x, y, z) \in F$ il suffit de vérifier que $x - 2y + 3z = 1$. Cela est un simple calcul :

$$x - 2y + 3z = (5b - a) - 2(1 + a + b) + 3(1 + a - b) = 1. \tag{11}$$

2. Démontrons maintenant l'inclusion $E \subset F$. Soit $(x, y, z) \in E$, on sait donc seulement que ce sont trois nombres réels et qu'ils vérifient $x - 2y + 3z = 1$. Le but est de trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} x = 5b - a & (L_1) \\ y = 1 + a + b & (L_2) \\ z = 1 + a - b & (L_3) \end{cases} \tag{12}$$

Rien qu'avec les lignes (L_2) et (L_3) on peut trouver une solution (a, b) qui s'exprimera en fonction de y et z (voir ci-dessous), mais toute la question est de savoir si elle sera bien aussi une solution de l'équation (L_1) ? La méthode plus propre est de raisonner avec des combinaisons linéaires des lignes.
Avec l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 + 3L_3$ le système est **équivalent** à

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = (5b - a) - 2(1 + a + b) + 3(1 + a - b) \\ y = 1 + a + b \\ z = 1 + a - b \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ y = 1 + a + b \\ z = 1 + a - b \end{cases} \tag{13}$$

La première ligne est alors bien vraie par hypothèse, et les deux lignes suivantes permettent de déterminer uniquement a et b :

$$L_2 + L_3 : y + z = 2a \qquad \text{donc} \qquad a = \frac{y + z}{2} \tag{14}$$
$$L_2 - L_3 : y - z = 2b \qquad \text{donc} \qquad b = \frac{y - z}{2} \tag{15}$$

□