TD 1 correction
Logique

Exercice 5. 1. Faire un dessin. Remarque : $x \in A\Delta B$ signifie exactement « $x \in A$ xor $x \in B$ ».

2. Δ est donc commutative et associative sur les ensembles, tout comme l'est xor sur les assertions.
3. $A\Delta A = \emptyset$ et $A\Delta\emptyset = A$.
4. Démontrer $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$ revient à démontrer avec une table de vérité que les assertions « $x \in A$ et ($x \in B$ xor $x \in C$) » et « ($x \in A$ et $x \in B$) xor ($x \in A$ et $x \in C$) » sont équivalentes (au sens de $\equiv$).
5. Démontrons soigneusement que pour tous ensembles A, B, C :

$$A\Delta B = A\Delta C \iff B = C \tag{1}$$

Il y a deux implications :

- $\Longleftarrow$ Ce sens est facile, si $B = C$ alors $A\Delta B = A\Delta C$.
- $\Longrightarrow$ Supposons $A\Delta B = A\Delta C$, il faut montrer que $B = C$. Il y a deux inclusions :
  - $B \subset C$: soit $x \in B$, il faut montrer $x \in C$. Alors pour utiliser l'hypothèse $A\Delta B = A\Delta C$ il y a deux cas :
    - Si $x \notin A$: alors ($x \in B$ et $x \notin A$ donc) $x \in A\Delta B$. Donc on en déduit que $x \in A\Delta C$. Mais puisque $x \notin A$ on en déduit que $x \in C$.
    - Si $x \in A$: alors ($x \in B$ et $x \in A$ donc) $x \notin A\Delta B$. Donc on en déduit que $x \notin A\Delta C$. Mais puisque $x \in A$ on en déduit que $x \in C$.

    Dans les deux cas on a bien montré $x \in C$.
  - $C \subset B$: même raisonnement, soit $x \in C$, il faut montrer $x \in B$ en utilisant l'hypothèse $A\Delta B = A\Delta C$ et il y a deux cas :
    - Si $x \notin A$, alors $x \in A\Delta C$, donc $x \in A\Delta B$, donc $x \in B$.
    - Si $x \in A$, alors $x \notin A\Delta C$, donc $x \notin A\Delta B$, donc $x \in B$.

    Dans les deux cas $x \in B$.

  On conclut alors ici $B = C$.

Exercice 9. 1. Vu en cours.

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\} \tag{2}$$

Ensuite ce sont les mêmes, plus eux-mêmes en y adjoignant 4.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) = \Big\{&\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{4\}, \{1,4\},\\ &\{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\Big\}\end{aligned} \tag{3}$$

2. Facile

$$\mathcal{P}(\{a,b\}) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\Big\} \tag{4}$$

Puis ce sont toutes les parties d'un ensemble à 4 éléments.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\})) = \Big\{&\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}, \{\emptyset,\{a\}\}, \{\emptyset,\{b\}\}, \{\emptyset,\{a,b\}\},\\ &\{\{a\},\{b\}\}, \{\{a\},\{a,b\}\}, \{b,\{a,b\}\}, \{\emptyset,\{a\},\{b\}\}, \{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\},\\ &\{\emptyset,\{b\},\{a,b\}\}, \{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}, \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\Big\}\end{aligned} \tag{5}$$

3. On a toujours $\emptyset \subset \emptyset$.

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \Big\{\emptyset\Big\} \tag{6}$$

C'est un ensemble à un seul élément, qui est l'ensemble vide... On a alors $\emptyset \subset \mathcal{P}(\emptyset)$ mais aussi $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(\emptyset)$.

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\} \tag{7}$$

C'est alors un ensemble à deux éléments.

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\} \tag{8}$$

Exercice 10. C'est le principe de contraposée.

$$\begin{aligned}A \subset B &\Longleftrightarrow \forall x \in E\ \Big(x \in A \Rightarrow x \in B\Big) && (9)\\ &\Longleftrightarrow \forall x \in E\ \Big(x \notin B \Rightarrow x \notin A\Big) && (10)\\ &\Longleftrightarrow \forall x \in E\ \Big(x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}\Big) && (11)\\ &\Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A} && (12)\end{aligned}$$

Exercice 11. 1. La fonction f s'annule (au moins une fois).
Négation : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$

2. La fonction f est croissante.
Négation : $\exists x_1 \in \mathbb{R}, \exists x_2 \in \mathbb{R}, \Big(x_1 \leqslant x_2 \text{ et } f(x_1) > f(x_2)\Big)$
3. La fonction f est constante.
Négation : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq y$
4. L'équation $f(x) = y$ admet toujours au moins une solution, quelque soit la valeur de y ; graphiquement, toute droite horizontale (avec y fixé) coupe le graphe de f ; ce n'est pas le cas des fonctions $x \mapsto x^2$, ou $x \mapsto e^x$, ou $x \mapsto \sin(x)$, mais c'est le cas de $x \mapsto x^3$ ou d'une fonction affine non-constante. La fonction f est dite *surjective*.
Négation : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq y$.

5. La fonction f est périodique.
   Négation : $\forall T > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x+T) \neq f(x)$
6. C'est la définition de la continuité, en tout $a \in \mathbb{R}$.
   Négation : $\exists a \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ \Big(|x-a| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(a) \geqslant \varepsilon\Big)$