TD 1
Logique

I Assertions

Exercice 1. On note V l'assertion qui est toujours vraie et F l'assertion qui est toujours fausse. Soit A une assertion quelconque. À quoi sont équivalentes les assertions suivantes ?

$$A \text{ et } V \qquad A \text{ et } F \qquad A \text{ et non}(A) \tag{1}$$
$$A \text{ ou } V \qquad A \text{ ou } F \qquad A \text{ ou non}(A) \tag{2}$$

Exercice 2. On définit le connecteur logique xor (*exclusive or*, en français *ou exclusif*) qui correspond à ce que l'on appelle communément « l'un ou l'autre, mais pas les deux en même temps ». Pour deux assertions A, B cela définit une nouvelle assertion $A \operatorname{xor} B$.

1. Proposer une table de vérité pour $A \operatorname{xor} B$.
2. Donner la table de vérité de
$$(A \text{ ou } B) \text{ et non}(A \text{ et } B) \tag{3}$$
et vérifier que cela correspond bien à $A \operatorname{xor} B$.
3. Vérifier que
$$A \operatorname{xor} B \quad \equiv \quad (A \text{ et non}(B)) \text{ ou } (\text{non}(A) \text{ et } B) \tag{4}$$
4. Donner la table de vérité de la négation de $A \operatorname{xor} B$.
5. Écrire $\text{non}(A \operatorname{xor} B)$ à l'aide des connecteurs logiques et, ou, non.
6. xor est-il commutatif ? Associatif ?

Exercice 3. Soient A, B, C trois assertions.

1. Donner la table de vérité des assertions suivantes :
$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow C \qquad A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C) \qquad (A \text{ et } B) \Longrightarrow C \tag{5}$$
Lesquelles sont équivalentes ?
2. Montrer qu'est toujours vraie la règle suivante :
$$\big((A \Longrightarrow B) \text{ et } (B \Longrightarrow C)\big) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C) \tag{6}$$
3. Interprétation ?

Exercice 4. Lors du dîner, un père logicien dit à son fils « si tu ne finis pas ta soupe, tu n'auras pas de dessert ». Le fils finit sa soupe, puis est privé de dessert. Qu'en pensez-vous ?

II Ensembles

Exercice 5.

1. Décrire $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$.
2. Soient deux nombres réels $a \neq b$. Décrire $\mathcal{P}(\{a,b\})$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\}))$.
3. Qu'est-ce que $\mathcal{P}(\emptyset)$? Et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$?

Exercice 6. Pour deux ensembles A, B, on définit leur différence symétrique $A \Delta B$ par :
$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \tag{7}$$

1. Représenter $A \Delta B$ par un dessin.
2. L'opération Δ est-elle commutative ? Associative ?
3. Que sont $A \Delta A$ et $A \Delta \emptyset$?
4. Montrer que l'intersection est distributive sur la différence symétrique.
5. Montrer que pour tous ensembles A, B, C :
$$A \Delta B = A \Delta C \quad \Longleftrightarrow \quad B = C \tag{8}$$

Exercice 7. Montrer que les ensembles suivants sont égaux :
$$E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 1\big\} \tag{9}$$
$$F = \big\{(5b - a, 1 + a + b, 1 + a - b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\big\} \tag{10}$$

III Quantificateurs

Exercice 8. Dans un groupe de personnes représenté par un ensemble E, on note $x \heartsuit y$ pour signifier « la personne x aime la personne y ». On suppose, que cela ne signifie pas nécessairement que y aime aussi x : la relation peut être à sens unique, ou bien réciproque.
Traduire avec des quantificateurs les situations suivantes :

1. Tout le monde s'aime soi-même.
2. Il y a quelqu'un que tout le monde aime.
3. Il y a quelqu'un qui n'aime personne (y compris lui-même).
4. Il y a quelqu'un qui n'aime personne d'autre que lui-même.
5. Il n'y a personne qui déteste tous les autres.
6. Chacun aime au moins deux personnes, autres que lui-même.
7. La relation $\heartsuit$ est réciproque.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes de la suite ainsi que leur négation :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend pas de valeurs plus grandes que 1.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend jamais deux fois la même valeur.
8. À partir d'un certain rang, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Exercice 10. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Que signifient les propriétés suivantes de la fonction f ?

1. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$
2. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = y$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = y$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = y$