Correction
TD 2
Méthodes de démonstration

Exercice 3. *1. Le* paradoxe du Barbier de Russell *s'énonce ainsi : supposons que le barbier du village rase* tous *les hommes qui ne se rasent pas eux-même, et seulement ceux-là. Qui rase le barbier ?*

2. Supposons qu'il existe un ensemble de tous les ensembles*, qu'on note $\mathcal{U}$ (comme univers). Posons*

$$E = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin x\}. \tag{2}$$

Étudier l'assertion $E \in E$.

3. Que peut-on conclure ?

Correction. 1. S'il se rase lui-même, alors il rase quelqu'un qui se rase lui-même… mais s'il ne se rase pas lui-même alors du coup il devrait se raser ? Problème.

2. E est toujours un élément de $\mathcal{U}$ (car c'est l'ensemble de tous les ensembles) ; si $E \in E$ alors et il ne vérifie pas la propriété $x \notin x$ donc il ne devrait par appartenir à E… mais si $E \notin E$ alors E vérifie la propriété $x \notin x$ donc devrait appartenir à E !

3. Il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles. Il faut donc faire attention quand on écrit des éléments x à ce qu'ils soient bien dans un certain ensemble E. Si on a ensemble A et qu'on veut définir le complémentaire de A par la condition « $x \notin A$ » alors dans quel ensemble est x ? ? ? Le complémentaire de A n'existe que si A est inclus dans un autre ensemble E, alors c'est « $x \in E$ et $x \notin A$ ».

□

Exercice 9. Démonstration du principe de récurrence

On admet la propriété suivante : toute partie $A \subset \mathbb{N}$ non vide *admet un plus petit élément.*

Soit $P(n)$ une propriété de l'entier $n \in N$. On suppose que $P(0)$ est vraie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$. On veut démontrer par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$. On pose $E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$.

1. Que signifie $E = \mathbb{N}$?

2. Supposons que non $\big(\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)\big)$*. Montrer que $\overline{E} \subset \mathbb{N}$ admet un plus petit élément $m \in \mathbb{N}$ et que $m > 0$.*

3. Montrer qu'alors $P(m-1)$ est vraie, puis que $P(m)$ est vraie.

4. Conclure.

Correction. 1. $E = \mathbb{N}$ signifie précisément : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$

2. Dans ce cas : $\exists n \in \mathbb{N}, \mathrm{non}(P(n))$. Or par définition $\overline{E} = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{non}(P(n))\}$. Cela signifie donc que $\overline{E}$ est non-vide. Par l'axiome admis au début de l'exercice, $\overline{E}$ admet un plus petit élément qu'on note $m \in \mathbb{N}$ (a priori $m \geqslant 0$, donc). Mais on sait que $P(0)$ est vraie donc $m \neq 0$, ainsi $m > 0$.

3. $m - 1 \in \mathbb{N}$ est inférieur au plus petit élément pour lequel P est fausse : c'est donc que $P(m-1)$ est vraie. Par l'hypothèse de récurrence on en déduit donc que $P(m)$ est aussi vraie.

4. On aboutit au fait que $P(m)$ est à la fois fausse et vraie : c'est une contradiction. C'est donc que l'hypothèse faite dans la question 2 est fausse, et donc qu'en fait $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

□