TD 2 correction
Méthodes de démonstration

Exercice 3. Inclusion $E \supset F$: soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, posons $x = 5b - a$, $y = 1 + a + b$, $z = 1 + a - b$. On calcule alors

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= (5b - a) - 2(1 + a + b) + 3(1 + a - b) && (1)\\ &= 5b - a - 2 - 2a - 2b + 3 + 3a - 3b && (2)\\ &= 1 && (3) \end{aligned}$$

ce qui démontre que $(x,y,z) \in E$.
Inclusion $E \subset F$: soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on suppose $x - 2y + 3z = 1$. Existe-t-il $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} x = 5b - a \\ y = 1 + a + b \\ z = 1 + a - b \end{cases} \iff \begin{cases} -a + 5b = x & (L_1) \\ a + b = y - 1 & (L_2) \\ a - b = z - 1 & (L_3) \end{cases} \tag{4}$$

? (on le ré-écrit comme un système d'inconnues $(a,b) \in \mathbb{R}^2$). Les deux première lignes par exemple déterminent d'uniques valeurs pour a et b : avec (L_1) on remplace $a = 5b - x$ dans (L_2) pour obtenir $6b - x = y - 1$ soit $b = \frac{x+y-1}{6}$, puis $a = 5b - x = \frac{-x+5y-1}{6}$. Ces valeurs vérifient-elles alors aussi (L_3) ? C'est le cas si

$$\frac{-x + 5y - 1}{6} - \frac{x + y - 1}{6} = z - 1 \tag{5}$$

c'est à dire $-x+5y-1-x-y+1 = 6z-6$. Ceci est bien vérifiée à cause de $x-2y+3z = 1$.

Exercice 4. Analyse : supposons qu'on ait une telle fonction, c'est à dire qu'on ait $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel qu'en posant $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x-1) = x^2$. On développe alors tout, notamment avec

$$\begin{aligned} (x+1)^3 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 && (6)\\ (x-1)^3 &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 && (7) \end{aligned}$$

et on trouve que la condition $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x-1) = x^2$ est équivalente à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (6a)x^2 + (4b)x + (2a + 2c) = x^2 \tag{8}$$

ce qui est vérifié dès que

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 4b = 0 \\ 2a + 2c = 0 \end{cases} \tag{9}$$

d'où on tire facilement $a = \frac{1}{6}$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{6}$ et d quelconque, prenons $d = 0$.
Synthèse : posons $f : x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x$. Les calculs précédents montrent bien que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x-1) = x^2$.
Application : on a alors

$$\begin{aligned} &1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 && (10)\\ &= (f(2) - f(0)) + (f(4) - f(2)) + \cdots + (f(2n+2) - f(2n)) && (11)\\ &= f(2n+2) - f(0) && (12) \end{aligned}$$

et donc la valeur de cette somme est $f(2n+2)$. On trouve ainsi en développant

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3}{3} \tag{13}$$

et si on arrive à factoriser

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} \tag{14}$$

Exercice 11.

1. Une façon de le formuler est : soit x rationnel, si y est irrationnel alors $x + y$ est irrationnel. La contraposée donne : soit x rationnel, si $x + y$ est rationnel alors y est rationnel. Mais il suffit de savoir que $y = (x + y) - x$ et que la différence (tout comme la somme) de nombre rationnels est encore rationnelle (ce qui n'est rien de plus que l'addition de fractions $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$). Ainsi, si x et $x+y$ sont tous les deux rationnels, alors y l'est.
2. Le principe est exactement le même, on veut montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore divergente. Ce qui revient à montrer qu'en supposant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, alors si $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors c'est que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente. Mais il suffit d'écrire que $v_n = (u_n + v_n) - u_n$ est de savoir que la différence de deux suites convergentes est encore convergente, en effet si la première converge vers ℓ et la seconde vers ℓ' alors la différence converge vers $\ell - \ell'$.

Exercice 12. On tourne autour de : si on suppose $E \in E$ on doit en déduire $E \notin E$, mais aussi si on suppose $E \notin E$ en doit en déduire $E \in E$. Tout cela est bien paradoxal. La conclusion de ce célèbre paradoxe est qu'**il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles**, et aussi qu'on ne peut pas prendre une propriété P et écrire $\{\, x \mid P(x) \,\}$ mais cet axiome de formation des ensembles s'écrit toujours $\{\, x \in E \mid P(x) \,\}$ où E est un ensemble dans lequel sont pris les éléments x. Pour cette raison aussi on évite de mettre des quantificateurs $\forall x$ sans indiquer dans quel ensemble est x ; et le complémentaire d'un ensemble A doit toujours être pris dans un plus gros ensemble E et pas dans « tout ».

Exercice 13.

1. $E = \mathbb{N}$ signifie précisément : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$.

2. Dans ce cas : $\exists n \in \mathbb{N}$, non$(P(n))$. Or par définition $\overline{E} = \{ n \in \mathbb{N} \mid \text{non}(P(n)) \}$. Cela signifie donc que $\overline{E}$ est non-vide. Par l'axiome admis au début de l'exercice, $\overline{E}$ admet un plus petit élément qu'on note $m \in \mathbb{N}$ (a priori $m \geqslant 0$, donc). Mais on sait que $P(0)$ est vraie donc en fait $m \neq 0$, ainsi $m > 0$.
3. $m - 1 \in \mathbb{N}$ est inférieur au plus petit élément pour lequel P est fausse : c'est donc que $P(m-1)$ est vraie. Par l'hypothèse de récurrence on en déduit donc que $P(m)$ est aussi vraie.
4. On aboutit au fait que $P(m)$ est à la fois fausse et vraie : c'est une contradiction. C'est donc que l'hypothèse faite dans la question 2 est fausse, et donc qu'en fait $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$.