TD 2
Méthodes de démonstration

I Ensembles et logique

Exercice 1. Soit E un ensemble. Le complémentaire, et la notation barre, signifie « complémentaire dans E ». Montrer (et rédiger proprement) que :

1. $\overline{E} = \emptyset$ et $\overline{\emptyset} = E$,
2. Pour toute partie $A \subset E$: $\overline{\overline{A}} = A$,
3. Pour toutes parties A, B de E : $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

Exercice 2. Montrer l'égalité d'ensembles :

$$\{(5-3t, -2+2t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x+3y=4\} \tag{1}$$

Exercice 3.

1. Le *paradoxe du Barbier de Russell* s'énonce ainsi : supposons que le barbier du village rase *tous* les hommes qui ne se rasent pas eux-même, et seulement ceux-là. Qui rase le barbier ?
2. Supposons qu'il existe un *ensemble de tous les ensembles*, qu'on note $\mathcal{U}$ (comme univers). Posons
$$E = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin x\}. \tag{2}$$
Étudier l'assertion $E \in E$.
3. Que peut-on conclure ?

Exercice 4. Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Démontrer l'équivalence :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n < M \quad \Longleftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M \tag{3}$$

II Analyse-synthèse

Exercice 5. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomiale de degré 3 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) - f(x-1) = x^2 \tag{4}$$

III Récurrence

Exercice 6. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geqslant 0, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx. \tag{5}$$

Exercice 7. Soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{6}$$

Exercice 8. *Démonstration du principe de récurrence*
On admet la propriété suivante : toute partie $A \subset \mathbb{N}$ *non vide* admet un plus petit élément.
Soit $P(n)$ une propriété de l'entier $n \in N$. On suppose que $P(0)$ est vraie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$. On veut démontrer par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$. On pose $E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$.

1. Que signifie $E = \mathbb{N}$?
2. Supposons que non $\big(\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)\big)$. Montrer que $\overline{E} \subset \mathbb{N}$ admet un plus petit élément $m \in \mathbb{N}$ et que $m > 0$.
3. Montrer qu'alors $P(m-1)$ est vraie, puis que $P(m)$ est vraie.
4. Conclure.