TD 3 correction
Nombres réels

Exercice 9.

- (E_1) Trois cas à traiter selon la position de x par rapport à 1 et à $\frac{5}{2}$.
  - Cas $x \leqslant 1$: l'équation est $-(x-1) = -(2x-5)$, solution $x = 4$, mais donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
  - Cas $1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$: l'équation est $x-1 = -(2x-5)$, solution $x = 2$, donc $\mathcal{S} = \{2\}$.
  - Cas $\frac{5}{2} \leqslant x$: l'équation est $x-1 = 2x-5$, solution $x = 4$, $\mathcal{S} = \{4\}$.

  Conclusion : $\mathcal{S} = \{2, 4\}$.
- (E_2) D'abord $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.
  - Cas $x > 0$: l'équation est $3x = \frac{1}{x}$, solutions $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.
  - Cas $x < 0$: l'équation est $-x = \frac{1}{x}$, pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

  Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.
- (E_3) Directement par équivalences

$$
\begin{aligned}
(E_3) &\iff 2 \leqslant \sqrt{x^2+1} < 3 && (1)\\
&\iff 4 \leqslant x^2+1 < 9 && (2)\\
&\iff 3 \leqslant x^2 < 8 && (3)
\end{aligned}
$$

  donc $\mathcal{S} = \left]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right[$.
- (E_4) D'abord $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Puis $\forall x \in \mathcal{D}$

$$
\begin{aligned}
(E_4) &\iff \frac{x}{x-2} - \frac{6}{x-1} < 0 && (4)\\
&\iff \frac{x(x-1) - 6(x-2)}{(x-1)(x-2)} < 0 && (5)\\
&\iff \frac{x^2 - 7x + 12}{(x-1)(x-2)} < 0 && (6)
\end{aligned}
$$

  Le numérateur a pour racines 3 et 4, se factorise en $(x-3)(x-4)$. Tableau de signe sans oublier la double barre sur 1 et 2, on trouve $\mathcal{S} =]1, 2[\cup]3, 4[$.
- (E_5) D'abord il faut $x + 3 > 0$ soit $x > -3$, et $x - 1 > 0$ soit $x > 1$. Donc $\mathcal{D} =]1, +\infty[$. Puis pour $x \in \mathcal{D}$, passant à l'exponentielle, l'équation est équivalente à $x + 3 \geqslant e(x-1)$ soit $0 \geqslant (e-1)x - (e+3)$ (on sait au moins $2 < e < 3$ donc $e - 1 > 0$). Solutions pour $x \leqslant \frac{e+3}{e-1}$. Où se situe ce nombre par rapport à $\mathcal{D}$? On voit $e - 1 < e + 3$ donc $1 < \frac{e+3}{e-1}$: il y a bien un intervalle de solutions.

  Conclusion : $\mathcal{S} = \left]1, \frac{e+3}{e-1}\right]$.
- (E_6) On pose $y = e^x$ maintenant, ou bien après avoir d'abord multiplié par e^x des deux côtés. On trouve (première méthode) $2y + 1 = \frac{6}{y}$, mais $y > 0$ donc on peut multiplier des deux côtés et ramener à $2y^2 + y - 6$. Si on multiplie par e^x d'abord, on n'a pas cette étape…

  Dans tous les cas on trouve $y_1 = -2$ et $y_2 = \frac{3}{2}$ et à la fin $\mathcal{S} = \left\{\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$.

Exercice 10.

1. On trouve $B^2 = 3+3+2\sqrt{1} = 8$ d'où $B = 2\sqrt{2}$ (ici $B \geqslant 0$, d'ailleurs $3 - 2\sqrt{2} \geqslant 0$).
2. On a toujours avec la quantité conjuguée $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ donc la somme est (« somme téléscopique »)

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\
&\qquad = \sqrt{n+1} - \sqrt{1} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

3.
   - $49 \leqslant 57 < 64$ donc $a = \lfloor\sqrt{57}\rfloor = 7$.
   - $(2\sqrt{15})^2 = 60$ et $49 < 2\sqrt{15} < 64$ donc $b = \lfloor 2\sqrt{15}\rfloor = 7$.
   - $c^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 5 + 6 + 7 + 2\sqrt{5\times 6} + 2\sqrt{5\times 7} + 2\sqrt{6\times 7}$, or on trouve aussi $\lfloor 2\sqrt{5\times 6}\rfloor = 10$, $\lfloor 2\sqrt{5\times 7}\rfloor = 11$, $\lfloor 2\sqrt{6\times 7}\rfloor = 12$. Sommant tous les encadrements alors

$$\underbrace{5+6+7+10+11+12}_{51} \leqslant c^2 < \underbrace{5+6+7+11+12+13}_{54} \qquad (8)$$

     donc $49 \leqslant c^2 < 64$ donc $c = 7$.