Correction
TD 3
Nombres réels

Exercice 5. 1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note $-A = \{-x \mid x \in A\}$. Montrer que :

(a) Un nombre M est un majorant de A ssi $-M$ est un minorant de $-A$.

(b) Un nombre N est le maximum de A ssi $-N$ est le minimum de $-A$.

(c) Un nombre T est la borne sup de A ssi $-T$ est la borne inf de $-A$.

2. On admet (seulement) que toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne sup. Montrer que toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inf.

3. On admet (seulement) que toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Montrer que toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.

Correction. 1. Remarque : $y \in A \Leftrightarrow \exists x \in A,\ y = -x \Leftrightarrow -y \in -A$.

(a) Équivalence directe : M majore A ssi $\forall x \in A,\ x \leqslant M$ ssi $\forall x \in A,\ -M \leqslant -x$ ssi $\forall y \in -A,\ -M \leqslant y$ ssi $-M$ minore $-A$.

(b) Il suffit de montrer qu'en plus de l'équivalence ci-dessus (en remplaçant M par N) : $N \in A$ ssi $-N \in -A$. C'est clair.

(c) On part de T majore A ssi $-T$ minore $-A$ et il faut montrer qu'en plus, T est le plus petit des majorants de A ssi $-T$ est le plus grand des minorants de $-A$. Mais si on pose E l'ensemble des majorants de A alors $-E$ est précisément l'ensemble des minorants de $-A$ (car $\forall u \in E, \forall x \in A,\ x \leqslant u$ va être équivalent à $\forall v \in -E,\ \forall y \in A,\ y \leqslant v$ où $v \leftarrow -u,\ y \leftarrow -x$) donc pour le minimum de E (qui est par définition T) alors $-T$ est le maximum de $-E$ et c'est par définition la borne inf de $-A$.

2. Soit A une partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$. Par la queston précédente, $-A$ est majorée. Et non-vide bien entendu (si il y a un élément $x \in A$ alors $-x \in -A$). Donc $-A$ admet une borne sup T. Et par la question précédente, $-T$ est donc une borne inf de A.

3. Soit A une partie non-vide et minorée de $\mathbb{Z}$. Si A est minorée par 0 alors A est en fait une partie de $\mathbb{N}$, donc il n'y a rien à faire… mais sinon (et même dans ce cas) : soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall x \in A,\ k \leqslant x$. L'idée est de « translater » un petit peu pour se ramener à une partie de $\mathbb{N}$ en posant $A - k = \{x - k \mid x \in A\}$ et c'est aussi l'ensemble des $y \in \mathbb{Z}$ tels que $y + k \in A$ (on a dit : si $k \geqslant 0$ il n'y a en fait rien à faire depuis le début, donc ceci est intéressant si $k < 0$ et ceci va ramener les éléments de A dans les entiers positifs). Alors pour tout $y \in A - k$, on a $y + k \in A$ donc $k \leqslant y + k$ donc $0 \leqslant y$ ce qui signifie que $A - k$ est une partie non-vide et minorée de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un minimum noté $m \in A - k$. Et alors en relisant ces inégalités : pour tout $x \in A$, $x - k \in A - k$ donc $m \leqslant x - k$ donc $m + k \leqslant x$. Ceci prouve que $m + k$ est un minorant de A, et c'est un minimum car $m \in A - k$ donc $m + k \in A$.

□

Exercice 6. Soit une partie A de $\mathbb{R}$ qu'on suppose non majorée.

1. Montrer que A contient au moins un élément positif. On l'appelle u_0.
2. Montrer qu'on peut construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
4. Réciproquement, montrer que si dans une partie $B \subset \mathbb{R}$ on peut construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B qui tend vers $+\infty$ alors B n'est pas majorée.
5. Application : montrer que $\{x \sin(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ n'est pas majoré.

Correction. 1. Si non : A serait majorée par 0 ! Car la négation de « A est majorée » est « $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A,\ x > M$ » (appliquer ceci avec $M = 0$), et d'ailleurs la négation de « A contient au moins un élément positif » est « A est majorée par 0 »…

2. Exactement pareil : pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, A n'est pas majorée par n, donc il existe au moins un élément de A qui est $\geqslant n$. Choisissons un tel élément et appelons le u_n. Ceci définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Un théorème d'encadrement, dit *théorème des gendarmes*, permet de conclure que comme la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $+\infty$.

4. Pour cette question il faut connaitre la définiton de limite : cela signifie ici que

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n > M)$$

Mais cela implique plus simplement que B est non majorée : pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe au moins un élément $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > M$ (prendre $n = N$ ci-dessus) et avec $u_n \in B$ et donc B n'est pas majorée par M.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Alors l'élément $u_n = x\sin(x)$ est dans cet ensemble et est égal à $(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) \times 1$ soit $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ et ceci tend bien vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. Donc cet ensemble n'est pas majoré.

□

Exercice 7. Calculer (sans calculatrice !) les parties entières des nombres suivants :

$$a = \sqrt{42} \qquad b = \sqrt{11} + \sqrt{13} \qquad c = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \tag{4}$$

Correction. Revenons sur c.

— Premier essai :

$$1^1 \leqslant 2 < 2^2 \quad \text{donc} \quad 1 \leqslant \sqrt{2} < 2 \quad (E_1)$$
$$1^1 \leqslant 3 < 2^2 \quad \text{donc} \quad 1 \leqslant \sqrt{3} < 2 \quad (E_2)$$

De $3(E_1) + 2(E_2)$ on tire $5 \leqslant c < 10$ donc la partie entière de c est parmi 5, 6, 7, 8, 9.

— Deuxième essai : on élève alors au carré

$$c^2 = 3^2 \times 2 + 2^2 \times 3 + 2 \times 3 \times 2 \times \sqrt{2 \times 3} = 30 + 12\sqrt{6}.$$

Encadrant

$$2^2 \leqslant 6 < 9^2 \quad \text{donc} \quad 2 \leqslant \sqrt{6} < 3 \quad (E_3)$$

puis $30+12(E_3)$ (c'est à dire : multiplier tout par 12 et ajouter 30 partout) donne $54 \leqslant c^2 < 66$. En particulier $7^2 = 49 \leqslant c < 81 = 9^2$ donc la partie entière de c est 7 ou 8. C'est mieux mais ne conclut pas !

— Troisième essai : on élève encore au carré

$$\begin{aligned} c^4 = (c^2)^2 = (30 + 12\sqrt{6})^2 \\ &= 30^2 + 12^2 \times 6 + 2 \times 30 \times 12 \times \sqrt{6} = 1764 + 720\sqrt{6} \end{aligned}$$

puis on reprend l'inégalité (E_3) portant sur $\sqrt{6}$:

$$1764 + 720(E_3) : \quad 3204 \leqslant c^4 < 3924$$

(Bien sûr, on utilise la calculatrice... mais sans la fonction racine carrée, seulement des calculs sur les nombres entiers ! Que l'on pourrait faire à la main si on voulait.)
Il reste à encadrer des deux côtés et voir que

$$7^4 = 2401 \leqslant 3204 \leqslant c^4 < 3924 \leqslant 4096 = 8^4$$

donc la partie entière de c est bien égale à 7.

— Alternative à la troisième étape : de $54 \leqslant c^2 < 66$ on échoue à montrer que la partie entière de c est 7 et pas 8 à cause de ce 66, mais il aurait suffit d'avoir une majoration par 64... cela rate de peu ! Et si on regarde avant, on a majoré $\sqrt{6}$ par 3 mais il semble que $\sqrt{6}$ est plus proche de 2 que de 3 (car 6 est plus proche de 4 que de 9). Ne pouvait-on pas majorer $\sqrt{6}$ par le nombre au milieu entre 2 et 3, c'est à dire $\frac{5}{2}$? L'inégalité est équivalente à

$$\begin{aligned} \sqrt{6} < \frac{5}{2} &\iff 2\sqrt{6} < 5 \\ &\iff (2\sqrt{6})^2 < 5^2 \\ &\iff 4 \times 6 < 25 \\ &\iff 24 < 25 \end{aligned}$$

ce qui est bien vrai ! Alors on écrit

$$2 \leqslant \sqrt{6} < \frac{5}{2} \quad (E_3')$$

puis $30 + 12(E_3')$ donne $54 \leqslant c^2 < 60$ et là on peut conclure.
Encore une fois, même si on utilise la calculatrice, ce n'est pas la même chose que de demander directement la racine carrée. Si notre inégalité $\sqrt{6} < \frac{5}{2}$ avait échoué (cela en est passé pas loin !) et si on pense toujours que la partie entière de c sera bien 7 et pas 8, alors on peut tenter de majorer $\sqrt{6}$ par exemple par le nombre qui est aux 3/4 entre 2 et 3, c'est à dire $\frac{11}{4}$, ce qui là encore se ramène à démontrer des inégalités uniquement en nombres entiers.

□