TD 3
Nombres réels

I Équations et inéquations

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $x = \sqrt{x+2}$
2. $|3x+6| = 2x-1$
3. $|x+1| + |x+2| = 3$
4. $e^x - 10e^{-x} = 3$
5. $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln(3x)$
6. $x - \sqrt{x+5} = 3$
7. $mx^2 + 2x = 1$, en fonction de $m \in \mathbb{R}$

Exercice 2. Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $-2x^2 + 7x - 5 \leqslant 0$
2. $(2x+3)(4-x) < (4-x)(x+3)$
3. $|2x+3| \leqslant x+3$
4. $x \geqslant \frac{1}{x}$
5. $2e^{2x} - 7e^x - 15 > 0$
6. $\sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{4x-1}$
7. $\frac{x}{x-2} < \frac{6}{x-1}$
8. $\frac{2x+m}{x-3} \leqslant 1$, en fonction de $m \in \mathbb{R}$

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\lfloor \sqrt{x^2+1} \rfloor = 2$
2. $2e^{-x} - 6e^x = 1$
3. $x^2 - 2mx - m + 6$ en fonction de $m \in \mathbb{R}$
4. $(\ln(x))^2 + 3\ln(x) + 2 = 0$
5. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} = \sqrt{5}$

II Parties de $\mathbb{R}$

Exercice 4. Donner s'ils existent les maximums, minimums, bornes sup, bornes inf, pour les parties de $\mathbb{R}$ suivantes.

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \qquad B =]-1, 0[\cup \{1\} \tag{1}$$

$$C = \{(-1)^n \times n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad D = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \tag{2}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor 1 - x \rfloor = 2\} \qquad F = \mathbb{Q} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 2\} \tag{3}$$

Exercice 5.

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note $-A = \{-x \mid x \in A\}$. Montrer que :
   (a) Un nombre M est un majorant de A ssi $-M$ est un minorant de $-A$.
   (b) Un nombre N est le maximum de A ssi $-N$ est le minimum de $-A$.
   (c) Un nombre T est la borne sup de A ssi $-T$ est la borne inf de $-A$.
2. On admet (seulement) que toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne sup. Montrer que toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inf.
3. On admet (seulement) que toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Montrer que toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.

Exercice 6. Soit une partie A de $\mathbb{R}$ qu'on suppose non majorée.

1. Montrer que A contient au moins un élément positif. On l'appelle u_0.
2. Montrer qu'on peut construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
4. Réciproquement, montrer que si dans une partie $B \subset \mathbb{R}$ on peut construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B qui tend vers $+\infty$ alors B n'est pas majorée.
5. Application : montrer que $\{x\sin(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ n'est pas majoré.

III La partie entière

Exercice 7. Calculer (sans calculatrice !) les parties entières des nombres suivants :

$$a = \sqrt{42} \qquad b = \sqrt{11} + \sqrt{13} \qquad c = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \tag{4}$$

Exercice 8. Pour tout nombre réel x, on définit la suite $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ des approximations décimales par en-dessous de x par :

$$A_n(x) = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}. \tag{5}$$

1. Démontrer que $A_n(x) \leqslant x < A_n(x) + \frac{1}{10^n}$.
2. En déduire que la suite $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.
3. À quelle condition a-t-on $A_n(x) = x$? Que dire alors de $A_{n+1}(x)$?
4. (sans calculatrice) Sachant que $A_3(\sqrt{2}) = 1{,}414$, déterminer $A_2(\sqrt{2})$ et $A_2(-\sqrt{2})$.
5. (sans calculatrice) Sachant que $A_3(e) = 2{,}718$, déterminer $A_2(e+\sqrt{2})$ et $A_2(e-\sqrt{2})$.