Correction
TD 4
Trigonométrie

Exercice 1. 1. Calculer les cosinus, sinus, et tangentes, de $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{12}$.

2. Donner les valeurs en $\frac{3\pi}{8}$ et en $\frac{5\pi}{12}$.

Correction. — Pour $\frac{3\pi}{8}$: $2 \times \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$ donc la formule de duplication donne

$$\cos(\tfrac{3\pi}{4}) = 2\cos^2(\tfrac{3\pi}{8}) - 1$$

d'où

$$\cos^2(\tfrac{3\pi}{8}) = \frac{1+\cos(\frac{3\pi}{4})}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Comme $\frac{3\pi}{8}$ est dans le premier cadrant, $\cos(\frac{3\pi}{8}) > 0$. Donc il faut choisir la racine positive :

$$\cos(\tfrac{3\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

De même on trouve

$$\cos(\tfrac{3\pi}{4}) = 1 - 2\sin^2(\tfrac{3\pi}{8})$$

d'où

$$\sin^2(\tfrac{3\pi}{8}) = \frac{1-\cos(\frac{3\pi}{4})}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

puis comme $\sin(\frac{3\pi}{8}) > 0$ on trouve

$$\sin(\tfrac{3\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

De là on déduit :

$$\tan(\tfrac{3\pi}{4}) = \frac{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$$

dans la fraction on multiplie en haut et en bas par $2+\sqrt{2}$ et on obtient

$$\tan(\tfrac{3\pi}{4}) = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

— Pour $\frac{5\pi}{12}$: $2 \times \frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}$. En reprenant les même calculs on trouve

$$\cos^2(\tfrac{5\pi}{12}) = \frac{1+\cos(\frac{5\pi}{6})}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

donc, comme $\cos(\frac{5\pi}{12}) > 0$:

$$\cos(\tfrac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

De même

$$\sin^2(\tfrac{5\pi}{12}) = \frac{1-\cos(\frac{5\pi}{6})}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

puis comme $\sin(\frac{5\pi}{12}) > 0$ on trouve

$$\sin(\tfrac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Donc :

$$\tan(\tfrac{5\pi}{12}) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{7+4\sqrt{3}}$$

□

Exercice 2. 1. Donner une formule pour $\cos(3x)$ sous forme de polynôme en $\cos(x)$.

2. Donner une formule pour $\sin(3x)$ sous forme de polynôme en $\sin(x)$.
3. Donner une formule pour $\cos(5x)$ sous forme de polynôme en $\cos(x)$.

Correction. On a vu :

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= 2\cos^2(x) - 1 \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
\cos(3x) &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \\
\sin(3x) &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x)
\end{aligned}$$

alors on écrit :

$$\begin{aligned}\cos(5x) &= \cos(3x+2x)\\ &= \cos(3x)\cos(2x) - \sin(3x)\sin(2x)\\ &= \underbrace{\big(4\cos^3(x) - 3\cos(x)\big)\big(2\cos^2(x)-1\big)}_{A(x)} - \underbrace{\big(3\sin(x) - 4\sin^3(x)\big)\big(2\sin(x)\cos(x)\big)}_{B(x)}\end{aligned}$$

Le morceau de gauche se développe en

$$A(x) = 8\cos^5(x) - 10\cos^3(x) + 3\cos(x)$$

et le morceau de droite en

$$B(x) = 6\sin^2(x)\cos(x) - 8\sin^4(x)\cos(x)$$

Fort heureusement, les termes $\sin(x)$ apparaissent seulement avec un exposant *pair* (ce n'est pas un hasard : $\cos(5x)$ est une fonction paire, donc on doit trouver une expression qui est invariante quand on change x en $-x$; c'est bien le cas d'un terme $\cos^n(x)$ pour tout n, et de $\sin^n(x)$ si n est pair, mais pas si n est impair) et donc on peut remplacer $\sin^2(x)$ par $1-\cos^2(x)$ (et bien sûr $\sin^4(x) = (\sin^2(x))^2$). Formellement, cela termine de démontrer qu'au moins il est *possible* d'exprimer $\cos(5x)$ comme polynôme en $\cos(x)$ uniquement… mais on préfère simplifier un peu. Alors on reprend les calculs :

$$\begin{aligned}B(x) &= 6(1-\cos^2(x))\cos(x) - 8(1-\cos^2(x))^2\cos(x)\\ &= -6\cos^3(x) + 6\cos(x) - 8(1+\cos^4(x) - 2\cos^2(x))\cos(x)\\ &= -8\cos^5(x) + 10\cos^3(x) - 2\cos(x)\end{aligned}$$

et en recollant les morceaux

$$\cos(5x) = A(x) - B(x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)$$

$\square$

Exercice 7. Simplifier les expressions

$$A = \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) \qquad B = -5\cos(x) - 2\sqrt{6}\sin(x) \qquad (4)$$

$$C = -3\cos(x) + 4\sin(x) \qquad D = 4\sqrt{2}\cos(x) - 7\sin(x) \qquad (5)$$

Correction. A Écrivons A sous forme $r\cos(x+\varphi)$: en développant

$$\begin{aligned}r\cos(x+\varphi) &= r\Big(\cos(x)\cos(\varphi) - \sin(x)\sin(\varphi)\Big)\\ &= (r\cos(\varphi))\cos(x) - (r\sin(\varphi))\sin(x)\end{aligned}$$

Ceci est égal à A dès que :

$$\begin{cases} r\cos(\varphi) = 1 & (1)\\ r\sin(\varphi) = \sqrt{3} & (2)\end{cases}$$

Alors $(1)^2+(2)^2$ donne $r^2 = 1 + (\sqrt{3})^2 = 4$ donc on prend $r=2$. Puis il s'agit de trouver φ tel que

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{1}{2}\\ \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

C'est une valeur remarquable : $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos(x + \tfrac{\pi}{3})$$

B Écrivons B sous forme $-r\sin(x+\varphi)$:

$$\begin{aligned}-r\sin(x+\varphi) &= -r\Big(\sin(x)\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(x)\Big)\\ &= -(r\sin(\varphi))\cos(x) - (r\cos(\varphi))\sin(x)\end{aligned}$$

Ceci est égal à B dès que :

$$\begin{cases} r\cos(\varphi) = 2\sqrt{6} & (1)\\ r\sin(\varphi) = 5 & (2)\end{cases}$$

Alors $(1)^2+(2)^2$ donne $r^2 = (2\sqrt{6})^2 + 5^5 = 4\times 6 + 25 = 49$ donc on prend $r=7$. Puis il faut trouver φ tel que

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{2\sqrt{6}}{7}\\ \sin(\varphi) = \frac{5}{7}\end{cases}$$

Ce n'est plus une valeur remarquable ! La première équation nous dit de prendre soit $+\arccos(\frac{2\sqrt{6}}{7})$ soit $-\arccos(\frac{2\sqrt{6}}{7})$, mais avec la deuxième équation le sinus doit être positif, donc en fait $\varphi = +\arccos(\frac{2\sqrt{6}}{7})$. Conclusion : pour cette valeur de φ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -5\cos(x) - 2\sqrt{6}\sin(x) = -7\sin(x+\varphi)$$

Si on écrivait B sous forme $r\sin(x+\psi)$ par exemple, on tomberait sur les équations

$$\begin{cases} r\cos(\psi) = -2\sqrt{6}\\ r\sin(\psi) = -5\end{cases}$$

D'ou on pourrait prendre, de même, $r = 7$ puis il faudrait choisir pour ψ entre $+\arccos(-\frac{2\sqrt{6}}{7})$ ou $-\arccos(-\frac{2\sqrt{6}}{7})$ et prendre ce dernier car étant dans $[-\pi, 0]$ son sinus est négatif... on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -5\cos(x) - 2\sqrt{6}\sin(x) = 7\sin(x+\psi)$$

Y a-t-il un problème ? Ce $\psi = -\arccos(-\frac{2\sqrt{6}}{7})$ est en fait **égal** à $\pi + \arccos(\frac{2\sqrt{6}}{7})$ (exercice 9, question (8)). Or en vertu de la symétrie $\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$ on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 7\sin(x+\psi) = 7\sin(x+\varphi+\pi) = -7\sin(x+\varphi) \tag{6}$$

Donc c'est bien le même résultat !
On aurait aussi puis choisir $r = -7$ comme racine de 49. On aurait alors eu le système

$$\begin{cases} \cos(\psi) = \frac{-2\sqrt{6}}{-7} \\ \sin(\psi) = \frac{-5}{-7} \end{cases}$$

qui est en fait le même qu'au premier essai (sous forme $-r\sin(x+\varphi)$)... car c'est ici qu'on traite le signe moins ! Les choix présentés ici sont faits pour arriver à des systèmes avec le moins possible de signes moins.

C Regroupons sous forme $-r\cos(x+\varphi)$:

$$\begin{aligned} -r\cos(x+\varphi) &= -r\Big(\cos(x)\cos(\varphi) - \sin(x)\sin(\varphi)\Big) \\ &= -(r\cos(\varphi))\cos(x) + (r\sin(\varphi))\sin(x) \end{aligned}$$

Ceci est égal à C dès que :

$$\begin{cases} r\cos(\varphi) = 3 & (1) \\ r\sin(\varphi) = 4 & (2) \end{cases}$$

Alors $(1)^2 + (2)^2$ donne $r^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ donc on prend $r = 5$. Puis il s'agit de trouver φ tel que

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{3}{5} \\ \sin(\varphi) = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Ce ne sont pas des valeurs remarquables. On prend $\varphi = \arccos(\frac{3}{5})$ qui est dans $[0, \pi]$ donc a bien son sinus positif. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -3\cos(x) + 4\sin(x) = -5\cos(x+\varphi)$$

Idem si on n'a pas mis le $-r$ à l'avance on se retrouve avec un système où le cosinus et le sinus sont tous les deux négatifs et on doit prendre $\varphi = -\arccos(-\frac{3}{5})$ etc.

D Regroupons sous forme $r\cos(x+\varphi)$:

$$\begin{aligned} r\cos(x+\varphi) &= r\Big(\cos(x)\cos(\varphi) - \sin(x)\sin(\varphi)\Big) \\ &= (r\cos(\varphi))\cos(x) - (r\sin(\varphi))\sin(x) \end{aligned}$$

Ceci est égal à D dès que :

$$\begin{cases} r\cos(\varphi) = 4\sqrt{2} & (1) \\ r\sin(\varphi) = 7 & (2) \end{cases}$$

Alors $(1)^2 + (2)^2$ donne $r^2 = (4\sqrt{2})^2 + 7^2 = 16 \times 2 + 49 = 81$ donc on prend $r = 9$. Puis il s'agit de trouver φ tel que

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{4\sqrt{2}}{9} \\ \sin(\varphi) = \frac{7}{9} \end{cases}$$

Ce ne sont pas des valeurs remarquables. On prend $\varphi = \arccos(\frac{4\sqrt{2}}{9})$ (ou pourquoi pas $\varphi = \arcsin(\frac{7}{9})$ qui est plus joli ? c'est **égal**) qui est dans $[0, \pi]$ donc a bien son sinus positif. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4\sqrt{2}\cos(x) - 7\sin(x) = 9\cos(x+\varphi)$$

□

Exercice 9. Démontrer les formules suivantes :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos(x) \tag{8}$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \tag{9}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Que devient (10) si $x \in]-\infty, 0[$?

Correction. — (9) : la formule à démontrer se réécrit $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$, pour tout $x \in [-1, 1]$.
Calculons le cosinus des deux côtés : d'une part $\cos(\arccos(x)) = x$ (toujours vrai : $\arccos(x)$ est l'unique nombre dans $[0, \pi]$ donc le cosinus vaut x) et d'autre part

$$\begin{aligned} & \cos(\tfrac{\pi}{2} - \arcsin(x)) \\ \text{(formulaire : symétrie par rapport à la diagonale)} \quad &= \sin(\arcsin(x)) \\ \text{(toujours vrai)} \quad &= x \end{aligned}$$

Les deux membres ayant le même cosinus, pour conclure il faut montrer qu'ils sont tous les deux dans l'intervalle $[0, \pi]$ où cos prend une unique fois chaque valeur de $[-1, 1]$. Mais le terme de gauche est bien dans $[0, \pi]$ par définition de arccosinus, et pour l'autre, par définition $\arcsin(x)$ est dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et donc

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(x) \leqslant \frac{\pi}{2} \\ (-) \quad & \iff -\frac{\pi}{2} \leqslant -\arcsin(x) \leqslant \frac{\pi}{2} \\ (+\tfrac{\pi}{2}) \quad & \iff 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \leqslant \pi \end{aligned}$$

ce qui est bien l'encadrement voulu.

— (10) pour $x \in]-\infty, 0[$: à supposer qu'une telle formule existe, alors pour $x = -1$ on trouve $\arctan(x) = \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{4}$ (car $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$) donc la formule qu'on voudrait démontrer est $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$ ce qui se ré-écrit $\arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.
De plus, si x est dans $]-\infty, 0[$ alors $\frac{1}{x}$ aussi et donc $\arctan(x)$ et $\arctan(\frac{1}{x})$ sont tous les deux dans $]-\frac{\pi}{2}, 0[$. Il reste donc à vérifier que le membre de droite de l'égalité à démontrer est aussi dans $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ et cela est un simple encadrement :

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < 0 \\ (-) \quad & \iff 0 < -\arctan(x) < \frac{\pi}{2} \\ (+(-\tfrac{\pi}{2})) \quad & \iff -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - \arctan(x) < 0 \end{aligned}$$

Donc les deux membres sont égaux ssi ils ont la même tangente. Or d'une part $\tan(\arctan(\frac{1}{x})) = \frac{1}{x}$ et d'autre part

$$\begin{aligned} & \tan(-\tfrac{\pi}{2} - \arctan(x)) \\ \text{(astuce : périodicité)} \quad & = \tan(\pi + (-\tfrac{\pi}{2} - \arctan(x))) \\ & = \tan(\tfrac{\pi}{2} - \arctan(x)) \\ \text{(formulaire : symétrie par rapport à la diagonale)} \quad & = \frac{1}{\tan(\arctan(x))} \\ & = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$\square$