TD 4 correction
Trigonométrie

Exercice 1.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad (1)$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad (2)$$
$$\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1+\sqrt{2} \quad (3)$$
$$\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \quad (4)$$
$$\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = -\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \quad (5)$$
$$\tan\left(\frac{19\pi}{12}\right) = -(2+\sqrt{3}) \quad (6)$$

Exercice 2. $\Longleftarrow$ évident
$\Longrightarrow$ En posant $x = 0$ on trouve $a = c$. Puis on posant $x = \frac{\pi}{k}$ alors $\cos(kx) = 0$, $\sin(kx) = 1$, et on déduit $b = d$.

Exercice 6. On a vu :

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \quad (7)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \quad (8)$$
$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \quad (9)$$
$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \quad (10)$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}
\cos(5x) &= \cos(3x+2x) && (11)\\
&= \cos(3x)\cos(2x) - \sin(3x)\sin(2x) && (12)\\
&= \underbrace{\big(4\cos^3(x) - 3\cos(x)\big)\big(2\cos^2(x) - 1\big)}_{A(x)} - \underbrace{\big(3\sin(x) - 4\sin^3(x)\big)\big(2\sin(x)\cos(x)\big)}_{B(x)} && (13)
\end{aligned}$$

Le morceau de gauche se développe en

$$A(x) = 8\cos^5(x) - 10\cos^3(x) + 3\cos(x) \quad (14)$$

et le morceau de droite en

$$B(x) = 6\sin^2(x)\cos(x) - 8\sin^4(x)\cos(x) \quad (15)$$

Fort heureusement, les termes $\sin(x)$ apparaissent seulement avec un exposant *pair* (ce n'est pas un hasard : $\cos(5x)$ est une fonction paire, donc on doit trouver une expression qui est invariante quand on change x en $-x$; c'est bien le cas d'un terme $\cos^n(x)$ pour tout n, et de $\sin^n(x)$ si n est pair, mais pas si n est impair) et donc on peut remplacer $\sin^2(x)$ par $1-\cos^2(x)$ (et bien sûr $\sin^4(x) = (\sin^2(x))^2$). Formellement, cela termine de démontrer qu'au moins il est *possible* d'exprimer $\cos(5x)$ comme polynôme en $\cos(x)$ uniquement… mais on préfère simplifier un peu. Alors on reprend les calculs :

$$\begin{aligned}
B(x) &= 6(1-\cos^2(x))\cos(x) - 8(1-\cos^2(x))^2\cos(x) && (16)\\
&= -6\cos^3(x) + 6\cos(x) - 8(1+\cos^4(x) - 2\cos^2(x))\cos(x) && (17)\\
&= -8\cos^5(x) + 10\cos^3(x) - 2\cos(x) && (18)
\end{aligned}$$

et en recollant les morceaux

$$\cos(5x) = A(x) - B(x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x) \quad (19)$$

Exercice 7.

$$\cos^4(\theta) = \frac{1}{8}(\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3) \quad (20)$$

Exercice 10. On trouve : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos(x+\pi/3) \quad (21)$$
$$-5\cos(x) - 2\sqrt{6}\sin(x) = 7\cos(x+\varphi) \qquad \varphi = +\arccos(-5/7) \quad (22)$$
$$-3\cos(x) + 4\sin(x) = 5\cos(x+\varphi) \qquad \varphi = -\arccos(-3/5) \quad (23)$$
$$4\sqrt{2}\cos(x) - 7\sin(x) = 9\cos(x+\varphi) \qquad \varphi = +\arccos(4\sqrt{2}/9) \quad (24)$$