TD 4
Trigonométrie

I Les formules classiques

Exercice 1.
1. Calculer les cosinus, sinus, et tangentes, de $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{12}$.
2. Donner les valeurs en $\frac{3\pi}{8}$ et en $\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 2.
1. Donner une formule pour $\cos(3x)$ sous forme de polynôme en $\cos(x)$.
2. Donner une formule pour $\sin(3x)$ sous forme de polynôme en $\sin(x)$.
3. Donner une formule pour $\cos(5x)$ sous forme de polynôme en $\cos(x)$.

Exercice 3.
1. Calculer $\cos(a+b)+\cos(a-b)$.
2. En déduire une formule pour le produit $\cos(a)\cos(b)$ qui fait intervenir des fonctions cos, mais sans produit entre elles.
3. De même, donner des formules pour $\sin(a)\sin(b)$ et pour $\sin(a)\cos(b)$ qui font intervenir des sommes mais pas de produits entre fonctions trigonométriques.

Exercice 4.
1. Soient deux nombres réels p, q. Déterminer des nombres a, b tels que
$$\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases} \tag{1}$$
2. Déduire de l'exercice précédent des formules pour $\cos(p)+\cos(q)$, $\sin(p)+\sin(q)$ et $\cos(p)-\cos(q)$ sous forme d'un seul produit de fonctions trigonométriques.

Exercice 5. Exprimer $\cos(x)$, puis $\sin(x)$, $\tan(x)$, en fonction de $t=\tan(\frac{x}{2})$.

II Équations et simplifications

Exercice 6. Linéariser (= exprimer comme somme de termes $\cos(nx)$, $\sin(mx)$, mais sans produit entre eux)

$$\cos^2(x) \qquad \sin^2(x) \tag{2}$$
$$\sin^3(x) \qquad \cos^2(x)\sin(x) \tag{3}$$

Exercice 7. Simplifier les expressions

$$A=\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x) \qquad B=-5\cos(x)-2\sqrt{6}\sin(x) \tag{4}$$
$$C=-3\cos(x)+4\sin(x) \qquad D=4\sqrt{2}\cos(x)-7\sin(x) \tag{5}$$

Exercice 8. Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

$$(E_1)\quad \sin(x)+\cos(x)=\frac{1}{2} \qquad (E_2)\quad \cos^2(x)-\sin^2(x)=0 \tag{6}$$
$$(E_3)\quad |\sin(x)|\leqslant\frac{1}{2} \qquad (E_4)\quad \cos(x)-\sin(x)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{7}$$

III Fonctions réciproques

Exercice 9. Démontrer les formules suivantes :

$$\forall x\in[-1,1],\quad \arccos(-x)=\pi-\arccos(x) \tag{8}$$
$$\forall x\in[-1,1],\quad \arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2} \tag{9}$$
$$\forall x\in\,]0,+\infty[,\quad \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Que devient (10) si $x\in\,]-\infty,0[$?

Exercice 10.
1. Démontrer que
$$\arctan(x)+\arctan(y)=\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \tag{11}$$
(en précisant dans quel ensemble doit être (x,y) pour que cela ait bien un sens).
2. Démontrer que $\frac{\pi}{4}=\arctan(\frac{1}{2})+\arctan(\frac{1}{3})$.
3. Démontrer de même la célébrissime *formule de Machin* :
$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right). \tag{12}$$

Pour vérifier que les termes de droite, dans les deux questions précédents, sont bien dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, *on pourra démontrer l'inégalité* $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}[$, $\tan(x)\geqslant x$ *puis démontrer que* $\forall y\in[0,+\infty[$, $\arctan(y)\leqslant y$.