TD 5 correction
Nombres complexes

Exercice 4. 2. On fait apparaitre la partie imaginaire de $\frac{az+b}{cz+d}$. Multipliant d'abord en haut et en bas par $\overline{cz+d} = c\overline{z} + d$ on a $\frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2}$. Développant, on trouve

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{acz\overline{z} + bd + adz + bc\overline{z}}{|cz+d|^2} \tag{1}$$

Mais $acz\overline{z} + bd$ est réel, la partie imaginaire provient uniquement du $adz + bc\overline{z}$. À ce stade, posant $z = x + iy$, alors $adz + bc\overline{z} = adx + bcx + adyi - acyi$. En résumé, on trouve la formule

$$\Im\mathrm{m}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2} \tag{2}$$

Or par hypothèse $ad - bc = 1$, et donc si $y > 0$ alors $\Im\mathrm{m}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0$.

Exercice 5. On démontre dans l'ordre (i) ⇒ (ii), (ii) ⇒ (iii) et (iii) ⇒ (i).
(i) $\implies$ (ii) : supposons qu'on ait $(M, N) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall z \in A$, $|\Re\mathrm{e}(z)| \leqslant M$ et $|\Im\mathrm{m}(z)| \leqslant N$. Alors écrivant $z = a + bi$ ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$) alors $|z|^2 = a^2 + b^2 \leqslant M^2 + N^2$ donc $|z| \leqslant \sqrt{M^2 + N^2}$, ceci démontre (ii) avec $R = \sqrt{M^2 + N^2}$.
(ii) $\implies$ (iii) : supposons qu'on ait $R \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in A$, $|z| \leqslant R$. Écrivant $z = a + bi$, on a $a^2 \leqslant a^2 + b^2$ et aussi $b^2 \leqslant a^2 + b^2$, d'où on déduit à la fois $|a| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \leqslant R$ et $|b| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \leqslant R$. C'est donc en posant $P = R$ qu'on obtient (iii).
(iii) $\implies$ (i) : immédiat en prenant M et N tous les deux égaux à P.
En résumé : la partie A est bornée en module si et seulement si elle est bornée à la fois en parties réelles et imaginaires, et dans ce dernier cas on peut même prendre la même borne pour les deux.

Exercice 7.

$$\cos(\theta)\sin^2(\theta) = \frac{1}{4}\Big(-\cos(3\theta) + \cos(\theta)\Big) \tag{3}$$

$$\cos^2(\theta)\sin(\theta) = \frac{1}{4}\Big(\sin(3\theta) + \sin(\theta)\Big) \tag{4}$$

$$\sin^3(\theta) = \frac{1}{4}\Big(-\sin(3\theta) + 3\sin(\theta)\Big) \tag{5}$$

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}\Big(\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)\Big) \tag{6}$$

$$\cos^4(\theta) = \frac{1}{8}\Big(\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3\Big) \tag{7}$$

$$\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) = \frac{1}{16}\Big(-\sin(5\theta) + \sin(3\theta) + 2\sin(\theta)\Big) \tag{8}$$