TD 5
Nombres complexes

I Forme algébrique

Exercice 1. Donner une description ou une interprétation géométrique de chacune des parties de $\mathbb{C}$ suivantes.

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = -iz\} \qquad B = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = iz\} \tag{1}$$
$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |2z+1| = 4\} \qquad D = \{z \in \mathbb{C} \mid z + 2\bar{z} = 3\} \tag{2}$$
$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| = |z+i|\} \qquad F = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z+4i}{5z-3} \in \mathbb{R}\right\} \tag{3}$$

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|z| < 1 \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) < 0 \tag{4}$$

2. Montrer que si $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ vérifie $ad - bc = 1$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{Im}(z) > 0 \Longrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0 \tag{5}$$

Exercice 3. Soit une partie $A \subset \mathbb{C}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La partie de $\mathbb{R}$ définie par $\{|z| \mid z \in A\}$ est bornée.

(ii) La partie de $\mathbb{R}$ définie par $\{|z|^2 \mid z \in A\}$ est bornée.

(iii) Les parties de $\mathbb{R}$ définies par $\{\operatorname{Re}(z) \mid z \in A\}$ et $\{\operatorname{Im}(z) \mid z \in A\}$ sont toutes les deux bornées.

(iv) La partie de $\mathbb{R}$ définie par

$$\{r \mid z \in A \setminus \{0\} \text{ peut s'écrire sous forme exponentielle } z = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in \mathbb{R}\} \tag{6}$$

est bornée.

II Forme trigonométrique ou exponentielle

Exercice 4. Linéariser (= exprimer comme combinaison linéaire de fonctions trigonométriques, sans produit entre elles), avec $\theta \in \mathbb{R}$:

1. $\cos^2(\theta)\sin(\theta)$
2. $\sin^3(\theta)$
3. $\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)$
4. $\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)$
5. $\cos^5(\theta)$

Exercice 5. Simplifier les nombres suivants en passant par la forme exponentielle :

$$z_1 = (1-i)^{18} \qquad z_2 = (\cos(\theta) - i\sin(\theta))^4 \tag{7}$$
$$z_3 = (1+i\sqrt{3})^4 \qquad z_4 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 \tag{8}$$

Exercice 6. *(Cours)*

1. Soient α et β deux nombres réels. Factoriser la somme $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ par l'« angle moitié » $e^{i(\alpha+\beta)/2}$ et simplifier. Que reconnait-t-on ?
2. En déduire des formules pour $\cos(\alpha) + \cos(\beta)$ et pour $\sin(\alpha) + \sin(\beta)$.
3. Factoriser de même $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$ et en déduire les formules pour $\cos(\alpha) - \cos(\beta)$ et pour $\sin(\alpha) - \sin(\beta)$.
4. Application : donner un argument du nombre complexe $z = e^{i\pi/5} + e^{-i\pi/7}$.
5. Application : résoudre l'équation $\sin(7\theta) = \sin(5\theta)$, d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E_1) \quad z^2 + 29 = 10z \qquad (E_2) \quad z + \frac{1}{z} = 1 \tag{9}$$
$$(E_3) \quad z^3 - 3z^2 + 5z = 3 \qquad (E_4) \quad z^7 = z \tag{10}$$

III Pour aller plus loin...

Exercice 8. On rappelle que dans le plan complexe, si un vecteur $\vec{u}$ a pour affixe $z_{\vec{u}}$ alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ le nombre complexe $e^{i\theta}z_{\vec{u}}$ est l'affixe de l'image de $\vec{u}$ par la rotation d'angle θ dans le sens direct.

1. L'image de M par la rotation d'angle θ et de centre A est définie comme le point N tel que le vecteur $\overrightarrow{AN}$ est obtenu par la rotation d'angle θ du vecteur $\overrightarrow{AM}$. Établir la relation suivante qui calcule l'affixe de N :

$$z_N = e^{i\theta}(z_M - z_A) + z_A \tag{11}$$

2. À quoi correspond l'affixe $-\bar{z}$ pour un point d'affixe z ?
3. Montrer que
$$e^{i\theta} \times \left(\overline{e^{-i\theta} z}\right) = e^{2i\theta} \bar{z} \tag{12}$$
et si M a pour affixe z alors ceci donne l'affixe de l'image de M par la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et formant un angle direct θ avec l'axe réel.
4. Montrer que si le point M a pour affixe z_M, alors le point N qui est l'image par M de la symétrie par rapport à la droite Δ passant par un point A d'affixe z_A et formant un angle direct θ avec l'origine, a une affixe donnée par
$$z_N = e^{2i\theta}(\bar{z}_M - \bar{z}_A) + z_A \tag{13}$$
θ est-il unique modulo 2π ? Pourquoi ?

Exercice 9. *Vers le chapitre suivant...*
On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence d'ordre 2 suivante :
$$u_0 = 2 \tag{14}$$
$$u_1 = 1 \tag{15}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \quad (*) \tag{16}$$

1. Calculer les 8 premiers termes de la suite. Qu'en pensez-vous ?
2. Donner les deux solutions de l'équation $(E) : q^2 = q - 1$.
3. Montrer qu'une suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = q^n$ pour un nombre $q \in \mathbb{C}$) vérifie la relation de récurrence $(*)$ si et seulement si q vérifie l'équation (E).
4. Montrer que si q, r sont deux solutions de (E) alors pour tous nombres $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = Aq^n + Br^n \tag{17}$$
vérifie encore la relation de récurrence $(*)$.
5. Donner une expression de u_n, sous forme complexe d'abord, puis ne faisant intervenir que des nombres réels.