TD 6 correction
Suites

Exercice 3. Montrons $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $F_nF_{m+1} + F_{n-1}F_m = F_{n+m}$.
Pour cela, montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\forall m \in \mathbb{N}$, $F_nF_{m+1} + F_{n-1}F_m = F_{n+m}$ » (le $\forall m$ ici est sous l'hypothèse de récurrence).

— $n = 1$: il s'agit de montrer $\forall m \in \mathbb{N}$, $F_{m+1} = F_{1+m}$. Clair.
— $n = 2$: il s'agit de montrer $\forall m \in \mathbb{N}$, $F_{m+1} + F_m = F_{2+m}$. C'est la relation de récurrence que vérifie la suite de Fibonacci.
— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$: « $\forall m \in \mathbb{N}$, $F_nF_{m+1}+F_{n-1}F_m = F_{n+m}$ » et $\mathcal{P}(n+1)$: « $\forall m \in \mathbb{N}$, $F_{n+1}F_{m+1} + F_nF_m = F_{n+1+m}$ ». Montrons $\mathcal{P}(n+2)$: « $\forall m \in \mathbb{N}$, $F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_m = F_{n+2+m}$ ». Pour cela, pour tout $m \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
&F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_m && (1)\\
&= (F_{n+1} + F_n)F_{m+1} + (F_n + F_{n-1})F_m && \text{(relation de récurrence sur } F_{n+2} \text{ et } F_{n+1}) \quad (2)\\
&= F_{n+1}F_{m+1} + F_nF_{m+1} + F_nF_m + F_{n-1}F_m && \text{(développer)} \quad (3)\\
&= (F_{n+1}F_{m+1} + F_nF_m) + (F_nF_{m+1} + F_{n-1}F_m) && \text{(réorganiser)} \quad (4)\\
&= F_{n+1+m} + F_{n+m} && \text{(utiliser } \mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1)) \quad (5)\\
&= F_{n+2+m} && \text{(relation de récurrence de Fibonacci)} \quad (6)
\end{aligned}$$

On a bien démontré la propriété $\mathcal{P}$ où n est remplacé par $n+2$.

Exercice 4. 2. Posons $A = \frac{1}{2\sqrt{7}}$, $B = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$, $q_1 = 3+\sqrt{7}$, $q_2 = 3-\sqrt{7}$. Alors $u_n = Aq_1^n + Bq_2^n$. Ici $q_1 + q_2 = 6$, $q_1q_2 = 2$, ce sont les deux racines de $q^2 - 6q + 2 = 0$. Cela démontre (équation caractéristique + linéarité) que u_n vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 6u_{n+1} + 2u_n = 0$, c'est à dire $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 2u_n$. À partir de là on montre par récurrence double $\mathcal{P}(n)$: « u_n est entier ».
— $n = 0$: $u_0 = 0$ est entier.
— $n = 1$: $u_1 = 1$ est entier.
— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n et u_{n+1} soient entiers. Alors de $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 2u_n$ on déduit que u_{n+2} est aussi entier.

3. Posons $A = 1$, $B = -1$, $q_1 = 13$, $q_2 = 4$, alors $u_n = Aq_1^n + Bq_2^n$. Ici $q_1 + q_2 = 17$, $q_1q_2 = 52$. Ainsi q_1 et q_2 sont les deux racines de $q^2 - 17q + 52$, et cela démontre que u_n vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 17u_{n+1} + 52u_n = 0$, c'est à dire $u_{n+2} = 17u_{n+1} - 52u_n$. Partant de là on démontre par récurrence double $\mathcal{P}(n)$: « u_n est multiple de 9 ».
— $n = 0$: $u_0 = 0$ est bien multiple de 9.
— $n = 1$: $u_1 = 9$ est bien multiple de 9.
— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n et u_{n+1} sont tous les deux multiples de 9. Il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $u_{n+1} = 9k$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $u_n = 9\ell$. De $u_{n+2} = 17u_{n+1} - 52u_n$ on déduit alors $u_{n+2} = 9 \times (17k - 52\ell)$ avec $17k - 52\ell \in \mathbb{Z}$, donc u_{n+2} est encore multiple de 9.

Exercice 5. 2. D'abord on montre par récurrence double $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$:
— $u_0 = 2 > 0$,
— $u_1 = 4 > 0$,
— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, alors de $u_{n+2} = \frac{(u_{n+1})^4}{(u_n)^3}$ on déduit $u_{n+2} > 0$.

On peut donc poser la suite $v_n = \ln(u_n)$ qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 4v_{n+1} - 3v_n$. Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Ici (C) : $q^2 - 4q + 3 = 0$, $\Delta = 4 > 0$, racines $q_1 = 1$ et $q_2 = 3$. Il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = A + 3^nB$. Ici $v_0 = \ln(2)$ et $v_1 = \ln(4) = 2\ln(2)$, on doit donc avoir $\ln(2) = A + B$ et $2\ln(2) = A + 3B$ d'où $A = B = \frac{\ln(2)}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{\ln(2)}{2}(1 + 3^n)$.
Il reste alors à retrouver l'expression de u_n, c'est

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{v_n} && (7)\\
&= e^{\frac{\ln(2)}{2}(1+3^n)} && (8)\\
&= \left(e^{\ln(2)}\right)^{\frac{1+3^n}{2}} && (9)\\
&= 2^{\frac{1+3^n}{2}} && (10)
\end{aligned}$$

On peut effectivement vérifier que $1+3^n$ est bien divisible par 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou bien démontrer la formule précédente directement par récurrence double si on l'avait et sans passer par des logarithmes.