TD 6
Suites

Exercice 1. *Équivalent à TD 5 exercice 3*
Soit une suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer l'équivalence entre :

(i) La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(ii) La suite réelle $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(iii) Les suites réelles $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux bornées.

(iv) Il existe des suites réelles $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ et la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

I Faits ou à finir

Exercice 2. La suite de Fibonacci a l'origine suivante. Leonardo Fibonacci souhaitait comprendre l'évolution d'une population de lapins en fonction du nombre n de mois écoulés. Les règles sont les suivantes :

1. Les lapins ne meurent pas. À chaque moment il y a trois types de lapins : ceux qui viennent de naitre, ceux qui ont juste un mois, et ceux qui ont au moins deux mois.
2. Les lapins qui peuvent procréer sont ceux qui ont au moins deux mois.
3. Chaque début de mois, chaque couple capable de procréer donne naissance à exactement un couple de lapins.

On note alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le nombre de couples de lapins total au début du n-ième mois.

1. Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{1}$$
2. On suppose $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ (c'est le minimum pour avoir une suite intéressante et non constamment nulle). Donner une expression de F_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ (*formule de Binet*). On note φ l'unique solution positive de l'équation caractéristique (*nombre d'or*).
3. À l'aide de cette expression, montrer que la suite $(\frac{F_{n+1}}{F_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers φ.
4. À l'aide de cette expression, montrer que la suite des $(\frac{F_{n+1}}{F_n} - \varphi)_{n\in\mathbb{N}^*}$ alterne de signe.

Exercice 3. Montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un nombre entier, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{(u_{n+1})^4}{(u_n)^3} \tag{2}$$
Donner l'expression de u_n en fonction de n.

II Suites de récurrence classiques

Exercice 5. Donner de terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas suivants.

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = -1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.
3. $u_0 = 0$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

Exercice 6.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que $u_1 = 10$ et $u_{100} = 1000$. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite avec $u_0 = 5$ et dont chaque terme est une augmentation de 2 % du précédent. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmético-géométrique telle que $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 9$. Donner l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \lambda u_n + 1$. Donner l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, en fonction du paramètre λ.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que chaque terme est la moyenne du terme précédent et du terme suivant. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7. Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n \\ v_{n+1} = 3v_n + u_n \end{cases} \tag{3}$$
Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(v_n - \lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, puis donner les expressions de u_n et de v_n en fonction de n.

III Autres suites de récurrence

Exercice 8. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et croissante.