TD 7 correction
Sommes et produits

Exercice 2. 3. On part de $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^4-k^4)$. D'une part c'est égal, par téléscopage, à $(n+1)^4-1$ (on ne développe pas tout de suite, sinon factoriser à la fin sera difficile) et d'autre part $(k+1)^4 = k^4+4k^3+6k^2+4k+1$ et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}((k+1)^4-k^4) &= \sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1) && (1)\\
&= \sum_{k=1}^{n}4k^3+\sum_{k=1}^{n}6k^2+\sum_{k=1}^{n}4k+n && (2)\\
&= 4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n && (3)\\
&= 4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\times\frac{n(n+1)}{2}+n && (4)\\
&= 4S_3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n && (5)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
4S_3 &= \Big((n+1)^4-1\Big)-\Big(n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n\Big) && (6)\\
&= (n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1) && (7)\\
&= (n+1)\Big((n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\Big) && (8)\\
&= (n+1)\Big((n+1)^3-n(2n+1)-(2n+1)\Big) && (9)\\
&= (n+1)\Big((n+1)^3-(n+1)(2n+1)\Big) && (10)\\
&= (n+1)^2\Big((n+1)^2-(2n+1)\Big) && (11)\\
&= (n+1)^2\times n^2 && (12)
\end{aligned}$$

et donc on trouve

$$S_3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad (13)$$

Exercice 3. 1. On écrit $\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$. On trouve alors une somme téléscopique sur deux termes et on fait à droite le changement d'indice $j=k+2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) && (14)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\right) && (15)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=3}^{n+2}\frac{1}{j}\right) && (16)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)-\left(\sum_{j=3}^{n}\frac{1}{j}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right) && (17)\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) && (18)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) && (19)\\
& && (20)
\end{aligned}$$

2. Pour le premier c'est directement une somme téléscopique, sachant $\ln(1+\frac{1}{k})=\ln(\frac{k+1}{k})=\ln(k+1)-\ln(k)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) && (21)\\
&= \ln(n+1)-\ln(1) && (22)\\
&= \ln(n+1) && (23)
\end{aligned}$$

Le deuxième est une somme téléscopique sur trois termes : $\ln(1+\frac{3}{k})=\ln(\frac{k+3}{k})=$

$\ln(k+3)-\ln(k)$ donc on fera le décalage d'indice $j=k+3$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{3}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+3)-\ln(k)) && (24)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\ln(k+3)\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\right) && (25)\\
&= \left(\sum_{j=4}^{n+3}\ln(j)\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\right) && (26)\\
&= \left(\sum_{j=4}^{n}\ln(j)+\ln(n+1)+\ln(n+2)+\ln(n+3)\right) && (27)\\
&\quad -\left(\ln(1)+\ln(2)+\ln(3)+\sum_{k=4}^{n}\ln(k)\right) && (28)\\
&= \ln(n+1)+\ln(n+2)+\ln(n+3)-\ln(1)-\ln(2)-\ln(3) && (29)
\end{aligned}$$

3. Il s'agit d'un produit téléscopique :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) && (30)\\
&= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) && (31)\\
&= \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)\times\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}k\times\prod_{k=2}^{n}k} && (32)
\end{aligned}$$

On doit alors poser $j=k-1$ d'un côté, $i=k+1$ de l'autre, et téléscoper (en haut et en bas, deux fois) tout un produit entre les indices 3 et $n-1$, ce qui donnera

$$\begin{aligned}
&\frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)\times\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}k\times\prod_{k=2}^{n}k} && (33)\\
&= \frac{\left(1\times 2\times\prod_{j=3}^{n-1}j\right)\times\left(n\times(n+1)\times\prod_{i=3}^{n-1}i\right)}{\left(2\times n\times\prod_{k=3}^{n-1}k\right)\times\left(2\times n\times\prod_{k=3}^{n-1}k\right)} && (34)\\
&= \frac{n+1}{2n} && (35)
\end{aligned}$$

Exercice 4. 3. Étudions la troisième méthode, qui consiste à remplacer k par $\sum_{i=1}^{k} i$ (ce qui est bien évidemment égal). On reconnait alors une somme double dont on peut inverser l'ordre :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}1\times q^k\right) && (36)\\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} q^k && (37)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}q^k\right) && (38)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{q^i-q^{n+1}}{1-q} && (39)
\end{aligned}$$

avec la formule pour la somme de termes successifs d'une suite géométrique. On poursuit alors, en utilisant encore une fois cette formule :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{n}q^i-nq^{n+1}\right) && (40)\\
&= \frac{1}{1-q}\left(\frac{q-q^{n+1}}{1-q}-nq^{n+1}\right) && (41)\\
&= \frac{q-q^{n+1}-n(1-q)q^{n+1}}{(1-q)^2} && (42)
\end{aligned}$$

ce qui est bien équivalent aux formules obtenues par les trois autres méthodes.

Exercice 6. — F : on écrit

$$F=\sum_{1=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\max(i,j)\right) \qquad (43)$$

puis on coupe la somme intérieure en i :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\max(i,j) &= \underbrace{\sum_{j=1}^{i}\max(i,j)}_{j\leqslant i}+\underbrace{\sum_{j=i+1}^{n}\max(i,j)}_{j>i} && (44)\\
&= \sum_{j=1}^{i}i+\sum_{j=i+1}^{n}j && (45)\\
&= i\times i+\frac{(n-i)\times(i+1+n)}{2} && (46)
\end{aligned}$$

(à gauche : somme constante de i termes égaux à i, et à droite : somme d'une suite arithmétique). On termine alors le calcul :

$$\begin{aligned}&\sum_{1=1}^{n}\left(i\times i+\frac{(n-i)\times(i+1+n)}{2}\right) && (47)\\ &=\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} && (48)\end{aligned}$$

Autre astuce : remarquer que $\min(i,j)+\max(i,j)=i+j$, et déduire F de la somme E et de celle (facile à calculer) des $i+j$.

— G : on rappelle que

$$|i-j|=\begin{cases} i-j & \text{si } i>j\\ 0 & \text{si } i=j\\ j-i & \text{si } i<j\end{cases} \tag{49}$$

et donc on démarre en découpant la somme en trois morceaux

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|=\sum_{i=1}^{n}\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{i-1}(i-j)}_{j<i}+\underbrace{0}_{j=i}+\underbrace{\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)}_{j>i}\right) \tag{50}$$

qui se ré-écrit en

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\underbrace{i(i-1)}_{i-1\text{ termes égaux à } i}-\sum_{j=1}^{i-1}j+\sum_{j=i+1}^{n}j\ \underbrace{-i(n-i)}_{n-i\text{ termes égaux à } i}\right) \tag{51}$$

ce qui donne alors

$$\sum_{i=1}^{n}\left(i(i-1)-\frac{(i-1)i}{2}+\underbrace{\frac{(n-i)((i+1)+n)}{2}}_{\substack{\text{suite arithmétique}\\ n-i\text{ termes, de } i+1 \text{ à } n}}-i(n-i)\right) \tag{52}$$

et qui ne pose en principe pas de problème, quitte à tout développer et regrouper comme un polynôme de degré 2 en i : c'est

$$\sum_{i=1}^{n}\left(i^2-(n+1)i+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\sum_{i=1}^{n}i^2-(n+1)\sum_{i=1}^{n}i+n\times\frac{n(n+1)}{2} \tag{53}$$

qui donne

$$\begin{aligned}&\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(n+1)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n^2(n+1)}{2} && (54)\\ &=\frac{n(n+1)(n-1)}{3} && (55)\end{aligned}$$

Autre astuce : remarquer qu'est toujours vrai $|i-j|=\max(i,j)-\min(i,j)$, et donc $G=F-E$.