Correction
TD 7
Sommes et produits

Exercice 2. *Le but est de retrouver les formules pour $\sum_{k=1}^n k$ et $\sum_{k=1}^n k^2$, on ne les suppose donc pas connues dans la première question.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer de deux façons différentes $\sum_{k=1}^n ((k+1)^2 - k^2)$:
   — En développant sous la somme,
   — En séparant la somme puis avec un changement de variable.
   En déduire la formule pour $\sum_{k=1}^n k$.
2. De même, et en utilisant la formule trouvée à la question précédente, calculer de deux façons différentes $\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3)$ puis retrouver la formule pour $\sum_{k=1}^n k^2$.
3. En appliquant la même méthode, trouver la formule pour $\sum_{k=1}^n k^3$.

Correction. Il reste la somme des cubes. On part de $\sum_{k=1}^n ((k+1)^4 - k^4)$. D'une part c'est égal, par téléscopage, à $(n+1)^4 - 1$ (on ne développe pas tout de suite, sinon factoriser à la fin sera difficile) et d'autre part $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n ((k+1)^4 - k^4) &= \sum_{k=1}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) \\
&= \sum_{k=1}^n 4k^3 + \sum_{k=1}^n 6k^2 + \sum_{k=1}^n 4k + n \\
&= 4\sum_{k=1}^n k^3 + 6\sum_{k=1}^n k^2 + 4\sum_{k=1}^n k + n \\
&= 4\sum_{k=1}^n k^3 + 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \\
&= 4\sum_{k=1}^n k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
4\sum_{k=1}^n k^3 &= \Big((n+1)^4 - 1\Big) - \Big(n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n\Big) \\
&= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \\
&= (n+1)\Big((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\Big) \\
&= (n+1)\Big((n+1)^3 - n(2n+1) - (2n+1)\Big) \\
&= (n+1)\Big((n+1)^3 - (n+1)(2n+1)\Big) \\
&= (n+1)^2\Big((n+1)^2 - (2n+1)\Big) \\
&= (n+1)^2 \times n^2
\end{aligned}$$

et donc on trouve

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

On remarque au passage que ceci est égal à $\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$, mais il n'y a pas d'explication *très simple* pour cela (pas possible par exemple de développer $(1+2+\cdots+n)^2$ et de reconnaitre une somme de cubes). □

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes.

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j) \qquad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j) \qquad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j| \tag{7}$$

Correction. Il reste la troisième. C'est très simple si on remarque que

$$|i-j| = \max(i,j) - \min(i,j)$$

en effet soit $i \geqslant j$ auquel cas $i - j \geqslant 0$ et donc $|i-j| = i-j$, soit $i \leqslant j$ auquel cas $i - j \leqslant 0$ et donc $|i-j| = -(i-j) = j-i$. Bref dans le deux cas c'est le plus grand moins le plus petit (ce qui donne bien un nombre positif !) On a alors

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j| = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j) - \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$$

(car la linéarité est vraie aussi pour les sommes doubles, sans aucun problème)

$$= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(formules trouvées et démontrées ensemble)

$$= \frac{n(n+1)}{6}\Big((4n-1)-(2n+1)\Big) = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

Si on ne remarque pas cela on fait de façon naïve : on réécrit

$$|i-j| = \begin{cases} i-j & \text{si } i>j \\ 0 & \text{si } i=j \\ j-i & \text{si } i<j \end{cases}$$

et donc on démarre avec

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j| = \sum_{i=1}^{n}\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{i-1}(i-j)}_{j<i} + \underbrace{0}_{j=i} + \underbrace{\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)}_{j>i}\right)$$

qui se ré-écrit en

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\underbrace{i(i-1)}_{i-1 \text{ termes égaux à } i} - \sum_{j=1}^{i-1} j + \sum_{j=i+1}^{n} j \underbrace{-i(n-i)}_{n-i \text{ termes égaux à } i}\right)$$

ce qui donne alors

$$\sum_{i=1}^{n}\left(i(i-1) - \frac{(i-1)i}{2} + \underbrace{\frac{(n-i)((i+1)+n)}{2}}_{\substack{\text{suite arithmétique}\\ n-i \text{ termes, de } i+1 \text{ à } n}} - i(n-i)\right)$$

et qui ne pose en principe pas de problème, quitte à tout développer et regrouper comme un polynôme de degré 2 en i : c'est

$$\sum_{i=1}^{n}\left(i^2-(n+1)i+\frac{n(n+1)}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} i^2 - (n+1)\sum_{i=1}^{n} i + n\times\frac{n(n+1)}{2}$$

qui donne

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (n+1)\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}$$

et qui se factorise par $n(n+1)$ permettant de retrouver le résultat précédent.

Il reste la question de pourquoi

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

L'intuition géométrique (dessin au tableau) invite à poser $S_n = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)$ et à calculer

$$S_n - n^2 = \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)\right) - n^2 = \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)-1\right)$$

(en effet, il y a bien n^2 termes dans la somme, et donc à l'envers, si on sort le -1 c'est un $-n^2$ qui sort)

$$= \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i-1,j-1)\right)$$

(facile à voir) puis on fait le double changement d'indice $k=i-1$ et $\ell=j-1$

$$= \left(\sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n-1}\min(k,\ell)\right)$$

mais pour $k=0$ ou $\ell=0$ tous ces termes sont nuls et donc il reste

$$= \left(\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n-1}\min(k,\ell)\right) \tag{8}$$

et ceci est exactement S_{n-1}, quitte à renommer les indices.
On a donc montré que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie $S_n = S_{n-1}+n^2$, et de plus on calcule facilement $S_0=1$, donc une récurrence évidente (en fait la définition par récurrence du symbole somme) montre que S_n est bien la somme des carrés d'entiers de 1 à n. □

Exercice 11. *(*)*
Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k} \qquad \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ pair}}}(-1)^{k/2}\binom{n}{k} \tag{10}$$

Correction. Pour le premier : on part de

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}(1+(-1)^k)\binom{n}{k}$$

et sous la somme, le terme $1+(-1)^k$ est égal à 2 si k est pair et 0 si k est impair. C'est donc qu'en fait

$$\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ pair}}} 2\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=(1+1)^n+(1-1)^n=2^n$$

et donc

$$\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}=\frac{1}{2}\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ pair}}} 2\binom{n}{k}=2^{n-1}$$

Pour le second : on part de

$$(1+i)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k$$

mais sous la somme le terme i^k est réel si k est pair (et alors égal à $(-1)^{k/2}$) et imaginaire pur sinon. C'est donc qu'en prenant la partie réelle :

$$\operatorname{Re}\Big((1+i)^n\Big)=\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ pair}}}(-1)^{k/2}\binom{n}{k}$$

Il reste à calculer en passant par la forme exponentielle : $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ (connu) et donc

$$\operatorname{Re}\Big((1+i)^n\Big)=\operatorname{Re}\Big((\sqrt{2})^n e^{in\pi/4}\Big)=(\sqrt{2})^n\cos(n\tfrac{\pi}{4})$$

et on peut voir que ceci est bien un nombre entier (selon la parité de n il alterne entre des puissances de 2, positives ou négatives, et 0).

Remarque : en combinant avec les idées de la question précédente, on pourrait en fait calculer

$$\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ multiple de } 4}}\binom{n}{k}$$

en sommant les deux sommes de l'exercice entre elles... remarquablement, comme le conjugué de $(1+i)^n$ est $(1-i)^n$ et donc la partie réelle est $\frac{1}{2}\Big(1+i)^n+(1-i)^n\Big)$, alors la somme ci-dessus est en fait

$$\frac{1}{4}\Big((1+1)^n+(1-1)^n+(1+i)^n+(1-i)^n\Big)$$

où $1,-1,i,-i$ sont les 4 racines 4-ième de l'unité. □