TD 7
Sommes et produits

I Sommes simples

Exercice 1. *Cours*

1. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géometrique de raison $q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Calculer $(1-q)\sum_{k=n_0}^{n_1} u_k$ et en déduire la formule
$$\sum_{k=n_0}^{n_1} u_k = \frac{u_{n_0}-u_{n_1+1}}{1-q} \tag{1}$$
2. Soit $(v_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique. Calculer de deux façons différentes $\sum_{k=n_0}^{n_1}(v_k+v_{n_1+n_0-k})$ et en déduire la formule
$$\sum_{k=n_0}^{n_1} v_k = (n_1-n_0+1)\frac{v_{n_0}+v_{n_1}}{2} \tag{2}$$

Exercice 2. *Le but est de retrouver les formules pour $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$, on ne les suppose donc pas connues dans la première question.*
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Calculer de deux façons différentes $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^2-k^2)$:
   — En développant sous la somme,
   — En séparant la somme puis avec un changement de variable.
   En déduire la formule pour $\sum_{k=1}^{n} k$.
2. De même, et en utilisant la formule trouvée à la question précédente, calculer de deux façons différentes $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3-k^3)$ puis retrouver la formule pour $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
3. En appliquant la même méthode, trouver la formule pour $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 3. *Changements d'indice*

1. Soit $n\in\mathbb{N}$, calculer
$$\sum_{k=n}^{2n}(2n-k)^2 \qquad \sum_{k=-n}^{2n} k^2 \tag{3}$$
2. Soit $n\in\mathbb{N}$ impair. Calculer
$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k(n-k)} \tag{4}$$

Exercice 4. *Téléscopage*
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. (a) Montrer qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que
$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\quad \frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1} \tag{5}$$
   (b) En déduire pour $n\in\mathbb{N}^*$ la somme $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$
2. Calculer $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$
3. Calculer $\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k}$

Exercice 5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit la fonction
$$f: x\longmapsto \sum_{k=0}^{n} x^k \tag{6}$$
définie sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de f de deux façons différentes et en déduire une formule pour $\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

Exercice 6. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On rappelle que les *racines n-ièmes de l'unité* sont les n nombres complexes $e^{2ik\pi/n}$ avec $0\leqslant k<n$ (ce sont les solutions $z\in\mathbb{C}$ de l'équation $z^n=1$ écrites sous forme exponentielle avec l'argument dans $[0,2\pi[$).
Calculer la somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité.

II Sommes doubles

Exercice 7. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes.
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j) \qquad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j) \qquad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j| \tag{7}$$

III Formule du binôme

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} 2^{n+k} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k+1} 3^k \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \tag{8}$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \qquad \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} \tag{9}$$

Exercice 9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Linéariser $\cos^6(\theta)$ et $\sin^6(\theta)$.
2. Exprimer $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$ comme polynômes en $\cos(\theta)$ et en $\sin(\theta)$.
3. Donner la formule générale qui linéarise $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$ $(n \in \mathbb{N})$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme T_n de degré n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire les nombres $(2+\sqrt{3})^n$ et $(2-\sqrt{3})^n$ sous la forme $a+b\sqrt{3}$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, puis retrouver *(TD 6 exercice 3)* que le nombre $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est entier.

Exercice 11. *(*)*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \qquad \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} (-1)^{k/2} \binom{n}{k} \tag{10}$$